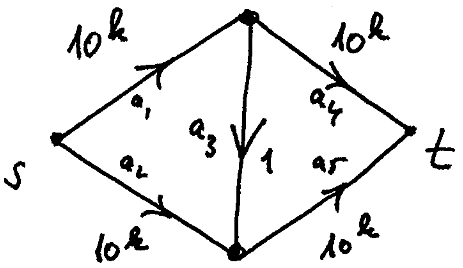
$c(\delta^+(s))$ nicht überschreiten kann, terminiert der Algo. nach höchstens $K\,c(\delta^+(s))$ vielen Schritten. $\boxtimes$

Es gibt Beispiele mit $c(a) \in \mathbb{R}$, so dass der Algo. nicht terminiert. (→ siehe Schrijver – CO-Buch, 10.4a)

§ 2 Verbesserung des Ford-Fulkerson-Algo.



offensichtlich:

$f = (10^k, 10^k, 0, 10^k, 10^k)$

ist max. s-t-Fluss mit

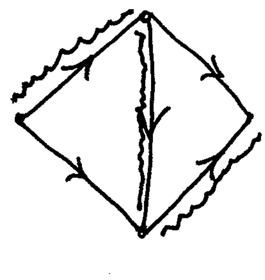
$\text{value}(f) = 2 \cdot 10^k$.

aber: ungünstige Wahl im Ford-Fulkerson-Algo. kann dazu führen, dass in jeder Iteration der Fluss nur um Wert 1 erhöht wird.

→ $2 \cdot 10^k$ Iterationen insgesamt.

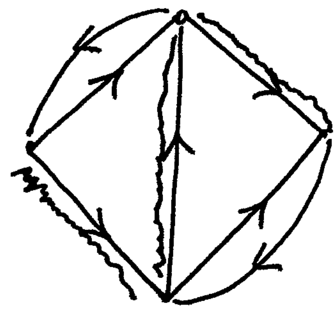
$f_1 = (0, 0, 0, 0, 0)$

D_{f_1}



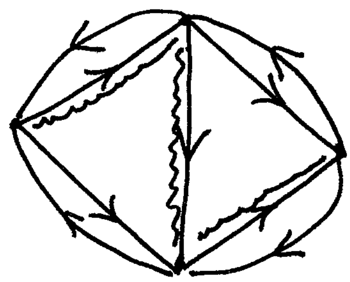
$f_2 = (1, 0, 1, 0, 1)$

D_{f_2}



$f_3 = (1, 1, 0, 1, 1)$

D_{f_3}



$f_4 = (2, 1, 1, 1, 2)$

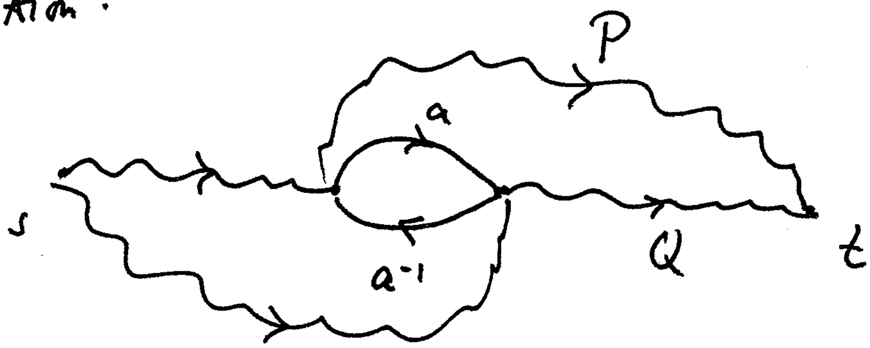
$\vdots$

Problem: gewählte s-t-Wege in D_{f_k} waren nicht die kürzesten.

Lösung: (Dinits (1970), Edmonds-Karp (1972))
So etwas kann nicht passieren, wenn die gewählten s-t-Wege minimale Länge haben.

Lemma $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $\mu(D) := \operatorname{dist}(s,t)$.
Sei $\alpha(D) \subseteq A$ Menge von Kanten, die in einem kürzesten s-t-Weg vorkommen. Definiere $D' = (V, A \cup \alpha(D)^{-1})$.
Dann gilt $\mu(D') = \mu(D)$ und $\alpha(D') = \alpha(D)$.

Bew.: Es genügt z.z., dass $\mu(D)$ und $\alpha(D)$ sich nicht verändern, wenn wir eine Kante $a^{-1} \in \alpha(D)^{-1}$ zu D hinzufügen. Ang. das ist nicht so. Dann gibt es einen s-t-Weg $P \subseteq A \cup \{a^{-1}\}$, der durch a^{-1} geht und Länge höchstens $\mu(D)$ hat. Da $a \in \alpha(D)$, gibt es einen s-t-Weg $Q \subseteq A$, der durch a geht und Länge $\mu(D)$ hat.
Situation:



Dann enthält $P \cup Q \setminus \{a, a^{-1}\}$ einen s-t-Weg der Länge $< \mu(D)$. $\lightning$

$\boxtimes$

Satz Falls in jeder Iteration des Ford-Fulkerson-Algo. ein kürzester s-t-Weg in D_f ausgewählt wird, dann ist die Anzahl der Iterationen $\leq |V| \cdot |A|$; insbesondere unabhängig von der Kapazitätsfkt.

Bew.: Falls wir einen Fluss f entlang eines kürzesten s-t-Weges P in D_f verbessern und einen neuen Fluss f' erhalten, dann ist die Kantenmenge von $D_{f'}$ in der Kantenmenge von $D' = (V, A_f \cup \alpha(D_f)^{*})$ enthalten.

Nach dem Lemma gilt $\mu(D_f) = \mu(D')$ und $\alpha(D_f) = \alpha(D')$, und $\mu(D_{f'}) \geq \mu(D')$.

Falls $\mu(D_{f'}) = \mu(D_f)$, dann $\alpha(D_{f'}) \subseteq \alpha(D') = \alpha(D_f)$.

Da wenigstens eine Kante aus P zu D_f aber nicht zu $D_{f'}$ gehört, haben wir strikte Inklusion $\alpha(D_{f'}) \subsetneq \alpha(D_f)$.

Diese Situation ($\mu(D_{f'}) = \mu(D_f)$) kann maximal $|A|$-mal vorkommen, danach muss $\mu(D_{f'}) > \mu(D_f)$ sein.

Da $\mu(D_f)$ sich höchstens $|V|$-mal vergrössern kann, folgt die Beh. $\boxtimes$