Kapitel 5 Polyedertheorie

Viele Optimierungsprobleme des OR lassen sich als ein <u>lineares Programm</u> formulieren:

<u>gegeben:</u> $c \in \mathbb{R}^n$,

$a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$,

$b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$

<u>gesucht:</u>

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & x \in \mathbb{R}^n \\ & a_1^T x \le b_1, \dots, a_m^T x \le b_m \end{aligned}$$

c definiert die <u>Zielfunktion</u> $x \mapsto c^T x$,

$a_j^T x \le b_j$ sind lineare Ungleichungen, die die Nebenbedingungen beschreiben.

<u>Kurzform:</u> $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit

$$A = \begin{bmatrix} - a_1^T - \\ \vdots \\ - a_m^T - \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ und } Ax \le b$$

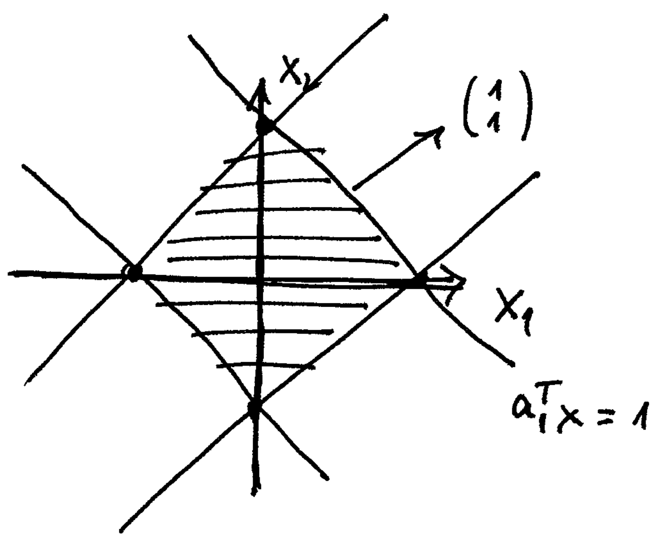
Manchmal kommt noch eine Ganzzahligkeits-nebenbedingung $x \in \mathbb{Z}^n$ hinzu ($\rightarrow$ späteren Kapitel).

<u>Dieses Kapitel</u>: Wie sieht die Menge der <u>zulässigen Lösungen</u> (die Vektoren, die die Nebenbedingungen erfüllen)

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

geometrisch aus?

<u>Bsp.</u>: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Dies ist ein (konvexes) Polyeder.

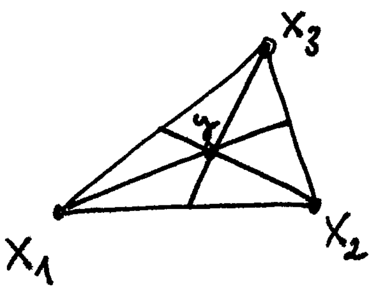
<u>Polyedertheorie</u>: Erweiterung der linearen Algebra über den Körper $\mathbb{R}$ durch lineare Ungleichungen.

§ 1 Konvexe Mengen

Def.: Seien $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ Punkte. Dann ist $y \in \mathbb{R}^n$ eine Konvexkombination von $x_1, \dots, x_N$, falls

$$y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

Bsp.:



$$y = \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3$$

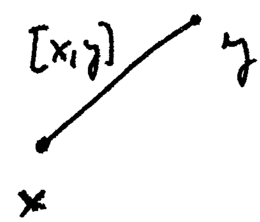
Schwerpunkt ist Konvexkombination

Def.: Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>konvex</u>, wenn sie unter der Bildung von Konvexkombinationen abgeschlossen ist, d.h.

$$\forall N \in \mathbb{N} \ \forall x_1, \dots, x_N \in C \ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0, \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$
$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \in C.$$

Def.: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ Punkte, dann ist

$$[x, y] = \{ (1-\alpha)x + \alpha y : \alpha \in [0,1] \}$$



die <u>Verbindungsstrecke</u> zwischen x und y.

Satz Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex

$$\iff \forall x, y \in C : \; [x, y] \subseteq C.$$

Bew.: „$\Longrightarrow$": klar: Spezialfall der Definition mit $N = 2$.

„$\Longleftarrow$": Zeige per Induktion nach N: Jede Konvexkombination von $\leq N$ Punkten aus C liegt wieder in C.

$N = 1$: ✓

$N \to N+1$: Sei $y = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i$ mit $x_i \in C$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i = 1$.

1. Fall: $\alpha_{N+1} = 1$

Dann ist $\alpha_1 = \ldots = \alpha_N = 0$ und $y = x_{N+1} \in C$.

2. Fall: $\alpha_{N+1} \neq 1$

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$y' = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{N+1}} x_i \in C, \quad \text{weil } \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{N+1}} \geq 0, \; \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{N+1}} = 1.$$

Desweiteren

$$y = (1-\alpha_{N+1}) y' + \alpha_{N+1} x_{N+1} \in [y', x_{N+1}] \subseteq C.$$

$\boxtimes$