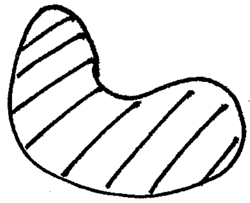
Bsp.: a)  ist keine konvexe Menge.

b) Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Norm.

Sei $K = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1 \}$ die zugehörige Einheitskugel.

Beh.: K ist konvex.

Bew.: Seien $x, y \in K$, $\alpha \in [0,1)$. Dann ist

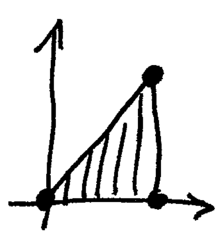
$$\| (1-\alpha) x + \alpha y \| \leq (1-\alpha) \|x\| + \alpha \|y\| = 1 .$$

Def.: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die <u>konvexe Hülle</u> von A ist

$$\operatorname{conv} A = \bigcap_{\substack{B \supseteq A \\ B \text{ konvex}}} B.$$

Da der Durchschnitt von konvexen Mengen wieder konvex ist, handelt es sich bei conv A um die (inklusionskleinste) konvexe Menge, die A enthält.

Bsp.: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



conv(A)

Satz Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\operatorname{conv} A = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}\ \exists x_1, \dots, x_N \in A\ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 : y = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \Big\}$$

D. h. $\operatorname{conv} A$ besteht aus allen Konvexkombinationen der Menge A.

Bew.: „$\subseteq$": trivial

„$\supseteq$": Sei B konvex mit $B \supseteq A$. Da B abgeschlossen unter der Bildung von Konvexkombinationen ist, muss für jede Wahl von $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_N \in A$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ stets $y = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \in B$ gelten. $\boxtimes$

Def.: Eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>(konvexes) Polytop</u>, falls es eine endliche Menge $A = \{x_1, \dots, x_N\}$ gibt mit

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{conv} A \\ &= \Big\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \Big\}. \end{aligned}$$

Sei $y \in \operatorname{conv} A$, d.h.

$$y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \quad \text{für } N \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_N \in A,\ \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

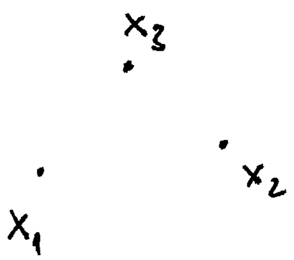
Frage: Wie groß muß N höchstens sein?

Def.: Die Punkte $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ sind affin unabhängig, falls

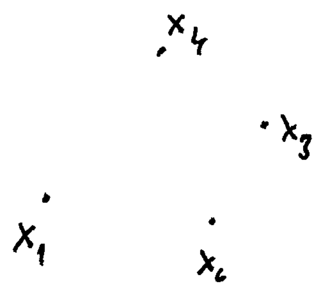
$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_N : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0,\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0.$$

In anderen Worten: Die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ x_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ sind linear unabhängig.

Bsp.:



sind affin unabhängig



nicht.

Def.: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Dimension von A ist

$$\dim A = \max\{N-1 : \exists\, x_1, \dots, x_N \in A \text{ affin unabh.}\}.$$

Es ist immer $\dim A \leq n$, weil $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \leq n+1$.

Satz (Caratheodory)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y \in \operatorname{conv} A$. Dann $\exists\, x_1, \dots, x_N \in A$ affin unabh. mit $y \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_N\}$. Insbesondere ist $N \leq \dim A + 1 \leq n+1$.

Bew.: Sei $y \in \operatorname{conv} A$ mit

$$y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \;, \quad x_i \in A, \; \alpha_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 .$$

Ang. N ist minimal und $x_1, \dots, x_N$ sind nicht affin unabh. Dann gibt es $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{N} \beta_i = 0$, $\sum_{i=1}^{N} \beta_i x_i = 0$ und $(\beta_1, \dots, \beta_N) \neq (0, \dots, 0)$. Sei oBdA $\beta_1 > 0$ und $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ so klein wie möglich. Betrachte die Darstellung

$$y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sum_{i=1}^{N} \beta_i x_i = \sum_{i=2}^{N} \gamma_i x_i \,, \qquad \gamma_i = \alpha_i - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \beta_i .$$

Da $\gamma_i \geq 0$ [klar, wenn $\beta_i \leq 0$; sonst wegen der Minimalität von $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$]

und $\sum_{i=2}^{N} \gamma_i = 1$, ist die Darstellung ein Widerspruch zur Minimalität von N. $\boxtimes$