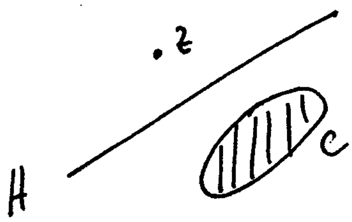
§ 2 Trenn- und Stützhyperebenen

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Menge.

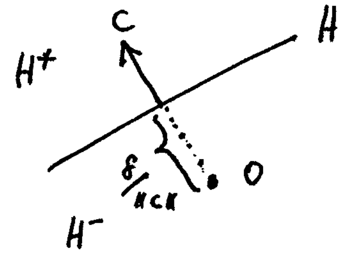
<u>Fundamentale Eigenschaft</u>: Jeder Punkt $z \notin C$ kann durch eine Hyperebene von C getrennt werden.



[Wichtige Verallgemeinerung in der Funktionalanalysis: Satz von Hahn-Banach]

<u>Def.</u>: $H \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>(affine)</u> <u>Hyperebene</u>, falls es einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $\delta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x = \delta\}.$$



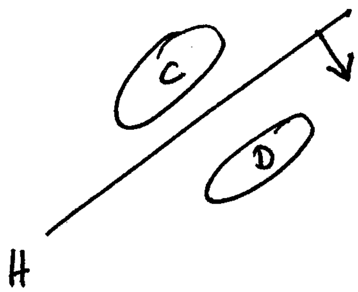
Die abgeschlossenen und konvexen Mengen

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x \geq \delta\},$$

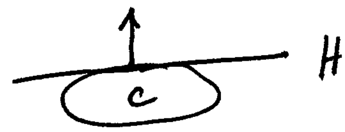
$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x \leq \delta\}$$

heißen Halbräume.

Def.: Seien $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Hyperebene H heißt <u>Trennhyperebene</u> von C und D, falls $C \subseteq H^-$ und $D \subseteq H^+$ (oder umgekehrt).



Def.: Eine Hyperebene H heißt <u>Stützhyperebene</u> von C, falls $C \subseteq H^-$ und $C \cap H \neq \emptyset$.

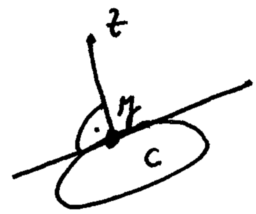


<u>Frage</u> Wie findet man Trenn- bzw. Stützhyperebenen?

<u>Antwort</u> Verwende <u>metrische Projektion</u>

(= beste Approximation von $z \notin C$ in C

= orthogonale Projektion, falls C affin linear ist)

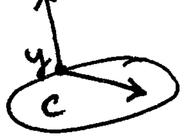


<u>Lemma</u> Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene und konvexe Menge, die nicht leer ist. Sei $z \notin C$. Dann

$$\exists!\, y \in C : \quad \|y - z\| = \inf_{x \in C} \|x - z\|. \qquad (\text{Notation: } y = \pi_C(z))$$

und

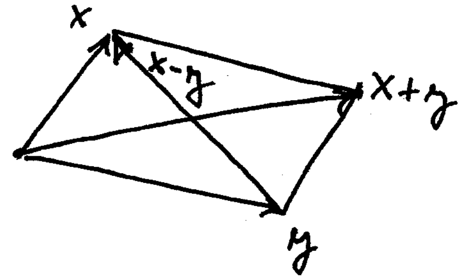
$$(z - y)^T (x - y) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in C.$$



Bew.: (funktioniert auch in allgemeinen Hilberträumen)

Zur Erinnerung: Parallelogrammgleichung

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$



Existenz von y: Sei $d = \inf_{x \in C} \|x - z\|$. OBdA ist $z = 0$ (durch Translation). Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus C mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = d$. Wir zeigen, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist: Nach der Parallelogrammgleichung ist

$$\Big\|\underbrace{\frac{x_n + x_m}{2}}_{\in C}\Big\|^2 + \Big\|\frac{x_n - x_m}{2}\Big\|^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m\|^2}_{\longrightarrow d^2}.$$

$$\Rightarrow \geq d^2 \qquad \Rightarrow \to 0$$

Weil $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Weil C abgeschlossen ist, ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$ ebenfalls in C. Dieser Grenzwert ist ein y mit der gewünschten Eigenschaft.

<u>Eindeutigkeit von y</u> Ang. $\|y\| = \|y'\| = \inf_{x\in C} \|x\|$ und $y \neq y'$. Dann ist

$$\underset{\overset{\cap}{C}}{\left\|\frac{y+y'}{2}\right\|^2} < \left\|\frac{y+y'}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y-y'}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|y'\|$$
$$= d^2,$$

was ein Widerspruch zur Minimalität von d ist.

<u>Zusatz</u> $(z-y)^T(x-y) \leq 0$ für alle $x \in C$

Sei $\alpha \in [0,1]$. Dann ist

$$\|z-y\|^2 \leq \|z-((1-\alpha)y+\alpha x)\|^2$$
$$= \|z-y+\alpha(y-x)\|^2$$
$$= \|z-y\|^2 + 2\alpha(z-y)^T(y-x) + \alpha^2\|y-x\|^2$$

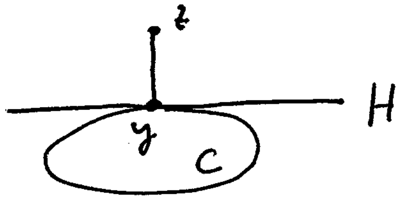
Demnach für $\alpha \in (0,1)$:

$$(z-y)^T(x-y) \leq \frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2$$

und die Beh. folgt, da die rechte Seite beliebig klein ≥ 0 werden kann. $\boxtimes$

Theorem Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Menge. Sei $z \notin C$ ein Punkt außerhalb von C. Dann gibt es eine Trennhyperebene von $\{z\}$ und C.

Bew.: Definiere die Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$ mit $c = z - y$ und $\delta = c^T y$, wobei $y = \pi_C(z)$.



Beh.: a) $z \in H^+$

b) $C \subseteq H^-$.

zu a) $c^T z \geq \delta \iff$

$$(z-y)^T z \geq (z-y)^T y \iff$$

$$(z-y)^T (z-y) \geq 0. \checkmark$$

zu b) Für $x \in C$ ist

$$c^T x \leq \delta \iff (z-y)^T x \leq (z-y)^T y$$

$$\iff (z-y)^T (x-y) \leq 0. \checkmark$$

$\boxtimes$

Bem.: Die im Beweis konstruierte Hyperebene ist eine Stützhyperebene von C. Falls $\delta \in (c^T y, c^T z)$ gewählt wäre, wäre H eine strikte Trennhyperebene von $\{z\}$ und C, d.h. $z \in H^+$ und $z \notin H$, $C \subseteq H^-$ und $C \cap H = \emptyset$.