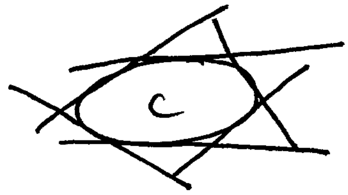
<u>Korollar</u> Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere abgeschlossene und konvexe Menge. Dann gilt

$$C = \bigcap_{\substack{H \text{ Stützhyperebene} \\ \text{von } C}} H^- .$$



<u>Bew.</u>: $\rightarrow$ Aufgabe 7.1

<u>Def.</u>: Eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>Polyeder</u>, falls es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

gilt.

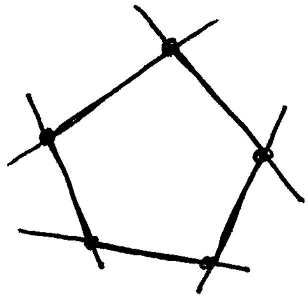
Polyeder $\hat{=}$ Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen;
Durchschnitt endlich vieler Halbräume (im Korollar genügen endlich-viele Stützhyperebenen, um P vollständig zu beschreiben).

<u>Jetzt</u>: Verhältnis zwischen Polyedern und Polytopen (konvexe Hülle endl.-vieler Punkte).

§ 3 Extrempunkte und Ecken

Def.: Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ein Punkt $z \in C$ heißt Extrempunkt von C, falls für alle $x, y \in C$ mit $z = \alpha x + (1-\alpha) y$ und $\alpha \in (0,1)$ stets $x = z = y$ folgt.

Bsp.: a)



5 Extrempunkte

b)

∞ - viele Extrempunkte

Sprechweise: Extrempunkte von Polyedern heißen Ecken.

Notation Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder und $z \in P$. Mit A_z bezeichne die Teilmatrix von A, die die Zeilen enthält mit $a_i^T z = b_i$ („aktive Ungleichungen")

Satz Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder und $z \in P$. Dann gilt: z ist Ecke von P $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rang} A_z = n$.

Bew.: „$\Rightarrow$": Ang. $\operatorname{rang} A_z < n$. Dann $\exists\, c \neq 0 : A_z c = 0$.

Da $a_i^T z < b_i$ für alle Zeilen von A gilt, die nicht zu A_z gehören, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$a_i^T(z+\delta c)\leq b_i \quad \text{und} \quad a_i^T(z-\delta c)\leq b_i .$$

Also: $A(z+\delta c)\leq b$ und $A(z-\delta c)\leq b$, und $z+\delta c, z-\delta c \in P$

D. h.: $z = \frac{1}{2}(z+\delta c)+\frac{1}{2}(z-\delta c)$ und somit ist z keine Ecke von P.

<u>„$\Longleftarrow$"</u>: Es sei $z=\alpha x+(1-\alpha)y$ mit $x,y\in P$, $\alpha\in(0,1)$.

Für eine Zeile a_i^T von A_z gilt

$$\begin{aligned} b_i = a_i^T z &= a_i^T(\alpha x+(1-\alpha)y) = \alpha a_i^T x + (1-\alpha)a_i^T y \\ &\leq \alpha b_i + (1-\alpha) b_i = b_i . \end{aligned}$$

Also $a_i^T x = a_i^T y = b_i$, da $\alpha\in(0,1)$. Da $\operatorname{rang} A_z = n$, hat das System $a_i^T w = b_i$, das aus den Zeilen von A_z besteht eine eindeutige Lösung. D. h. $x = z = y$ und z ist Ecke von P. $\boxtimes$

<u>Korollar</u> Ein Polyeder $P=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\leq b\}$ mit $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ hat höchstens $\binom{m}{n}$ Ecken.