Theorem (Minkowski)

Ein beschränktes Polyeder ist ein Polytop.

Bew.: Seien $x_1, \dots, x_t$ die Ecken des beschränkten Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

Beh.: $P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_t\}$.

Bew.: „$\supseteq$": klar

„$\subseteq$": Sei $z \in P$. Zeige $z \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_t\}$ per Induktion nach $n - \operatorname{rang}(A_z)$.

Induktionsanfang: $n - \operatorname{rang}(A_z) = 0$

Dann $\operatorname{rang}(A_z) = n \Rightarrow z$ Ecke von $P \Rightarrow z \in \{x_1, \dots, x_t\}$.

Induktionsschluss: $n - \operatorname{rang}(A_z) > 0$.

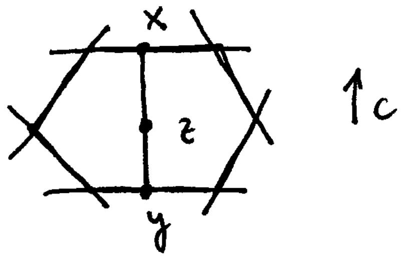
Dann $\operatorname{rang}(A_z) < n \Rightarrow \exists\, c \neq 0 : A_z c = 0$.

Sei

$$\mu_0 = \max\{\mu : z + \mu c \in P\}$$
$$\nu_0 = \min\{\nu : z + \nu c \in P\}.$$

μ_0 und ν_0 existieren, weil P kompakt ist. Definiere

$$x = z + \mu_0 c, \quad y = z + \nu_0 c$$



Es gilt

$$\mu_0 = \min \left\{ \frac{b_i - a_i^T z}{a_i^T c} : a_i^T \text{ Zeile von } A,\ a_i^T c > 0 \right\}, \quad (*)$$

weil $a_i^T(z + \mu c) \leq b_i \iff \mu \leq \frac{b_i - a_i^T z}{a_i^T c}$ und μ_0 ist das größte solche μ. In $(*)$ sei i_0 die Zeile von A, in der das Minimum angenommen wird. Dann ist

(1) $A_z x = A_z z + \mu_0 A_z c = A_z z$

(2) $a_{i_0}^T x = a_{i_0}^T (z + \mu_0 c) = b_{i_0}$.

Somit enthält A_x alle Zeilen von A_z und außerdem die Zeile $a_{i_0}^T$. Da $A_z c = 0$ aber $a_{i_0}^T c \neq 0$ gilt $\operatorname{rang} A_x > \operatorname{rang} A_z$

Nach I.V. ist $x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_t\}$. Genauso folgt $y \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_t\}$

Da $z \in [x, y]$ ist, folgt die Beh. $z \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_t\}$.

$\boxtimes$

Def.: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$A^* = \{ y \in \mathbb{R}^n : x^T y \leq 1 \quad \forall x \in A \}$$

die Polare von A

Lemma a) Für $\alpha > 0$: $(\alpha A)^* = \frac{1}{\alpha} A^*$.

$(\beta B = \{\beta b : b \in B\}$ mit $\beta \in \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}^n)$

b) $A \subseteq B \Longrightarrow A^* \supseteq B^*$

c) $(B_n)^* = B_n$, wobei $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T x \leq 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel.

d) $P = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_t\} \Rightarrow P^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x_1^T y \leq 1, \ldots, x_t^T y \leq 1\}$.

Bew.: a, b) $\rightarrow$ Aufgabe 7.4

c) „$\subseteq$": Sei $y \in (B_n)^*$. Falls $y = 0$, dann $y \in B_n$.

Falls $y \neq 0$, dann $y^T \frac{1}{\|y\|} y \leq 1$. Also $\|y\| \leq 1$ und $y \in B_n$.

„$\supseteq$": Seien $x, y \in B_n$. Dann gilt (nach Cauchy-Schwarz):

$x^T y \leq \|x\| \, \|y\| \leq 1$, also $x \in (B_n)^*$.

d) „$\subseteq$": klar.

"$\supseteq$": $y \in \mathbb{R}^n$ erfülle $x_1^T y \leq 1, \ldots, x_t^T y \leq 1$.

Sei $z \in P$. Dann ist $z = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i = 1$.

Es ist $z^T y = \left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i x_i\right)^T y = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \; x_i^T y \leq \sum_{i=1}^{t} \alpha_i = 1$.

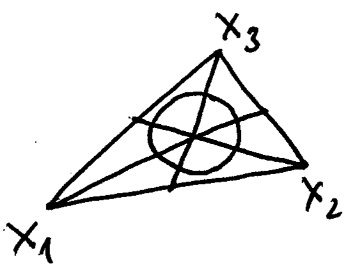
Theorem (Weyl)

Ein Polytop ist ein beschränktes Polyeder.

Bew.: Sei $P = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_t\}$ ein Polytop im $\mathbb{R}^n$

- OBdA. $0 \in P$ (durch Translation)
- OBdA. $\dim P = n$ (durch Einschränkung auf den Span von P)
- OBdA. $x_1, \ldots, x_{n+1}$ affin unabhängig (durch Umnumerierung)

Für Schwerpunkt $x_0 = \frac{1}{n+1}(x_1 + \cdots + x_{n+1})$ gibt es ein $r > 0$, so dass $B(x_0, r) \subseteq P$, wobei $B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x_0\| \leq r\}$.



- OBdA $x_0 = 0$ nach Translation

Nach (a)–(c) des Lemmas gilt

$$P^* \subseteq B(x_0, \tfrac{1}{r}).$$

Nach (d) ist P^* ein beschränktes Polyeder. Nach dem Theorem von Minkowski ist P^* ein Polytop. D.h.

$P^* = \operatorname{conv}\{y_1, \dots, y_s\}$ für $y_1, \dots, y_s \in \mathbb{R}^n$.

<u>Beh.</u>: $P = \{x \in \mathbb{R}^n : y_1^T x \leq 1, \dots, y_s^T x \leq 1\}$.

<u>Bew.</u>: <u>„$\subseteq$"</u>: Sei $x \in P$. Dann gilt $y_i^T x \leq 1$, weil $y_i \in P^*$.

<u>„$\supseteq$"</u>: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $y_1^T x \leq 1, \dots, y_s^T x \leq 1$.

Ang. $x \notin P$. Dann gibt es eine Trennhyperebene von $\{x\}$ und P:

$$\exists\, c \neq 0,\ \delta \in \mathbb{R} : \quad c^T x > \delta, \quad c^T x' \leq \delta \ \ \forall x' \in P.$$

Da $0 \in P$ ist $\delta > 0$. Wähle $\delta = 1$ (durch Skalieren von c).

Dann ist $c \in P^*$ und somit $c = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j y_j$, $\alpha_j \geq 0$, $\sum_j \alpha_j = 1$.

Desweiteren

$$1 < c^T x = \left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j y_j\right)^T x \leq \sum_{j=1}^{s} \alpha_j = 1. \qquad \lightning$$

$\boxtimes$

<u>Korollar</u> (Theorem von Minkowski-Weyl).

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann: P ist beschränktes Polyeder $\Longleftrightarrow$ P ist Polytop.