Wie sehen allgemeine, evtl. nicht beschränkte, Polyeder aus?

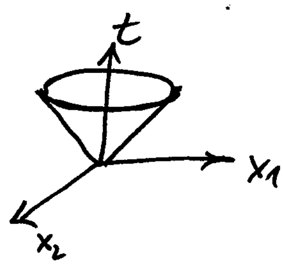
<u>Def.</u>: Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>konvexer Kegel</u>, falls

$$\forall \lambda, \mu \geq 0 \quad \forall x, y \in C : \quad \lambda x + \mu y \in C.$$

[Insbesondere ist C tatsächlich konvex.]

<u>Bsp.</u>: $\mathcal{L}^{n+1} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq t\}$

ist ein konvexer Kegel



<u>Def. + Satz</u> (konische Hülle)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die <u>konische Hülle</u> von A ist

$$\text{cone } A = \bigcap_{\substack{B \supseteq A \\ B \text{ konvexer Kegel}}} B$$

$$= \left\{ y \in \mathbb{R}^n : N \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0,\ x_1, \ldots, x_N \in A \right.$$
$$\left. y = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \right\}.$$

Def.: Ein konvexer Kegel $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt endlich erzeugt, falls es $y_1, \dots, y_t \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$C = \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\}.$$

Satz (Minkowski-Weyl für Kegel)

Ein konvexer Kegel $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist endlich erzeugt $\Longleftrightarrow$ $\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}: \quad C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$.

Bew.: siehe z.B. Chapter 7 in Schrijver - Theory of linear and integer programming.

Theorem Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$.

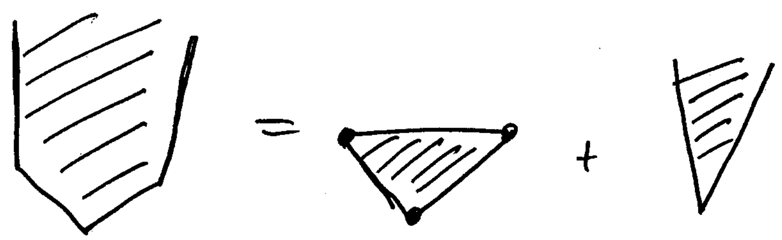
P ist Polyeder $\Longleftrightarrow$ $\exists x_1, \dots, x_s \in \mathbb{R}^n, y_1, \dots, y_t \in \mathbb{R}^n$:

$$P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_s\} + \text{cone}\{y_1, \dots, y_t\},$$

wobei $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Bew.: siehe z.B. Chapter 7 in Schrijver.

Bsp.:



§ 4 Lemma von Farkas

Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme.

$Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

<u>Satz</u> $\exists\, x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \iff$

$\nexists\, y \in \mathbb{R}^m : y^T A = 0$ und $y^T b \neq 0$.

<u>Bew.:</u> <u>„$\Rightarrow$"</u>: Ang. $\exists x : Ax = b$ und $\exists y : y^T A = 0,\ y^T b \neq 0$.

Dann $\underbrace{y^T A}_{=0} x = \underbrace{y^T b}_{\neq 0}$ $\lightning$

<u>„$\Leftarrow$"</u>: Ang. $Ax = b$ hat keine Lösung. Dann

$\operatorname{rang}[A \mid b] > \operatorname{rang} A$. Wähle $y \in \ker A^T$ mit $y^T b \neq 0$. ☒

Analoges Resultat für Systeme linearer Ungleichungen.

<u>Satz</u> (Farkas Lemma)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann

$\exists\, x \geq 0 : Ax = b \iff \nexists\, y \in \mathbb{R}^m : y^T A \geq 0$ und $y^T b < 0$.

Bew.: „$\Rightarrow$": Ang. $\exists x \geq 0 : Ax = b$ und $\exists y : y^T A \geq 0,\ y^T b < 0$.

Dann $y^T A x = y^T b < 0$, aber $\underbrace{(y^T A)}_{\geq 0} \underbrace{x}_{\geq 0} \geq 0$. $\lightning$

„$\Leftarrow$": Ang. $\nexists x \geq 0 : Ax = b$.

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvektoren von A. Nach Vor. ist $b \notin \operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$. Also $\exists$ Trennhyperebene von $\{b\}$ und $\operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$.

$\exists y \neq 0 : \quad y^T b < 0$ und $y^T x \geq 0 \ \forall x \in \operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$. $\boxtimes$

Interpretation: Theorem der Alternativen

Entweder: $\exists x \geq 0 : Ax = b$

oder: $\exists y : y^T A \geq 0,\ y^T b < 0$.

Korollar (Variante von Farkas Lemma)

$\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \iff \nexists y \geq 0 : y^T A = 0,\ y^T b < 0$.

Bew.: Betrachte die Matrix

$$A' = [\, A \mid -A \mid I_m \,] \in \mathbb{R}^{m \times (n+n+m)}$$

$\uparrow$ $m \times m$ Einheitsmatrix