Sei $x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n+m}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_3 \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned} \exists x' \geq 0 : A'x' = b &\iff \exists x_1, x_2, x_3 \geq 0 : \; Ax_1 - Ax_2 + x_3 = b \\ &\iff \exists x_1, x_2, x_3 \geq 0 : \; A(x_1 - x_2) + x_3 = b \\ &\iff \exists x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b. \end{aligned}$$

Wende Farkas Lemma auf $A'x' = b$ an:

$$\exists x' \geq 0 : A'x' = b \iff \nexists y \in \mathbb{R}^m : \; y^T [A \mid -A \mid I_m] \geq 0$$

$$\text{und } y^T b < 0.$$

Dabei

$$y^T [A \mid -A \mid I_m] \geq 0 \in \mathbb{R}^{n+n+m} \iff \begin{array}{l} y^T A \geq 0 \\ y^T(-A) \geq 0 \\ y^T I_m \geq 0 \end{array}$$

$$\iff y^T A = 0, \; y^T \geq 0.$$

$\boxtimes$

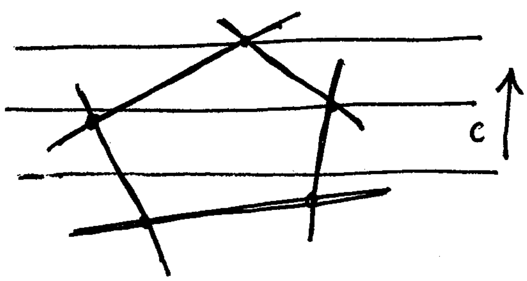
§5 Lineare Programmierung

Lineares Programm (LP) in Standardform

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & x \in \mathbb{R}^n \qquad (LP) \\ & Ax \le b, \end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben sind.

Geometrische Interpretation: Maximiere die lineare Funktion $x \longmapsto c^T x$ über das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$.



D.h. schiebe zu c orthogonale Hyperebenen soweit in Richtung c, dass sie P gerade noch schneiden.

Sprechweise: x heisst gültige / zulässige Lösung $\Longleftrightarrow$ $x \in P$

x heisst optimale Lösung $\Longleftrightarrow$ $x \in P$ und $c^T x = \max\{c^T y : y \in P\}$.

LP heisst unbeschränkt $\Longleftrightarrow$ $\sup\{c^T x : x \in P\} = +\infty$

LP heisst ungültig / unzulässig $\Longleftrightarrow$ $\nexists\, x \in P$.

Satz Falls die Menge der zulässigen Lösungen P ein nicht-leeres, beschränktes Polyeder ist, dann gibt es eine Ecke von P, die eine optimale Lösung von LP ist.

Bew.: Seien $x_1, \dots, x_t$ die Ecken von P. Nach dem Theorem von Minkowski ist $P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_t\}$. Ang. keine Ecke ist eine optimale Lösung. D.h. (und weil P kompakt ist):

$$\exists y \in P : \quad c^T y > c^T x_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, t.$$

Schreibe $y = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$. Dann ist

$$c^T y = c^T \left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \, c^T x_i < \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \, c^T y = c^T y. \lightning$$

Offensichtlicher (aber evtl. sehr langsamer) Algorithmus zur Lösung von (LP), falls P beschränkt: Bestimme alle Ecken $x_1, \dots, x_t$ von P und finde Index i_0 mit $c^T x_{i_0} \geq c^T x_i$ $\forall i = 1, \dots, t$.

Problem: t kann sehr groß werden, z.B. beim Würfel:

$$C_n = \{ x \in \mathbb{R}^n : \; -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \}.$$

$2n$ Ungleichungen, aber 2^n Ecken.

bessere Algorithmen: $\rightarrow$ spätere Kapitel.

dieses Kapitel: Optimalitätsbedingungen, Dualitätstheorie

<u>Def.</u>: Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dies definiert das <u>primale LP</u>

$$
\begin{aligned}
p^* = \max\ & c^T x \\
& x \in \mathbb{R}^n \qquad\qquad (PLP) \\
& Ax \le b
\end{aligned}
$$

und das <u>duale LP</u>

$$
\begin{aligned}
d^* = \min\ & y^T b \\
& y \in \mathbb{R}^m \qquad\qquad (DLP) \\
& y \ge 0 \\
& y^T A = c^T.
\end{aligned}
$$

<u>Satz</u> (<u>schwache Dualität</u>)

Sei x zulässig für (PLP) und y zulässig für (DLP), dann ist $c^T x \le y^T b$.

Insbesondere $p^* \le d^*$.

<u>Bew.</u>: $y^T b - c^T x \ge y^T (Ax) - (y^T A) x = 0.$ $\boxtimes$

Satz (Optimalitätsbedingung)

Seien x, y zulässig. Dann ist x optimal für (PLP) und y optimal für (DLP) $\Longleftrightarrow$ $y^T(Ax-b)=0$.

Insbesondere gelten dann die Komplementaritätsbedingungen:

$$y_j \neq 0 \Longrightarrow (Ax-b)_j = 0$$

$$(Ax-b)_j \neq 0 \Longrightarrow y_j = 0, \qquad \text{für alle } j=1,\dots,m.$$

Bew.: $\rightarrow$ Blatt 9.

Theorem (starke Dualität, von Neumann (1947))

Falls (PLP) und (DLP) beide zulässige Lösungen besitzen, dann gilt $p^* = d^*$.

Bew.: $p^* \leq d^*$: ✓ schwache Dualität.

$p^* \geq d^*$: 1. Beh.: $\exists\, x_0 : Ax_0 \leq b$ und $c^T x_0 = p^*$.

Bew.: Da (DLP) zulässig folgt aus der schwachen Dualität $p^* = \sup\{c^T x : Ax \leq b\} < +\infty$.

z.z. $\exists\, x_0 : Ax_0 \leq b$ und $c^T x_0 \geq p^*$. Ang. ein solches x_0 gibt es nicht.