KAPITEL 6 — GANZZAHLIGE OPTIMIERUNG UND VOLLSTÄNDIG UNIMODULARE MATRIZEN

F. VALLENTIN, A. GUNDERT

1. Ganzzahlige lineare Programme

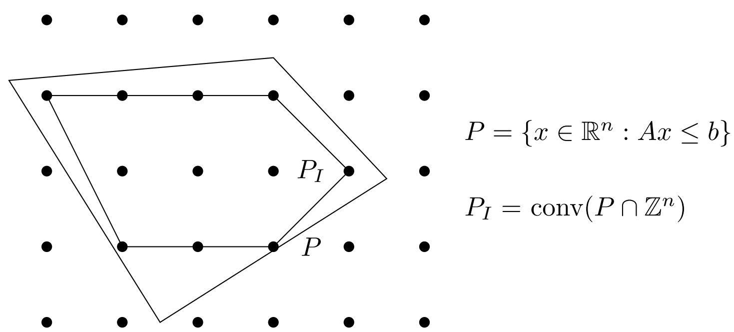
Viele Optimierungsprobleme des Operations Research lassen sich als *ganzzahlige lineare Programme* formulieren.

Definition 1.1. *Ein* ganzzahliges LP *(in Standardform) ist von der Form:*

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & x \in \mathbb{Z}^n \quad (\text{„}x \text{ ganzzahlig“}) \\ & Ax \le b, \end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Ein ganzzahliges lineares Programm nennen wir auch ILP oder IP (= „integer linear program“).

Wir maximieren also eine lineare Funktion über den ganzzahligen Punkten in einem Polyeder.



Beispiel 1.2. *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Mit $\mathbb{R}^V$ bezeichnen wir den Vektorraum der Funktionen von V nach $\mathbb{R}$, also*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^V &= \{f : V \to \mathbb{R} : f \text{ Funktion}\} \quad \text{und analog} \\ \mathbb{R}^E &= \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ Funktion}\} \\ \mathbb{R}^{V\times E} &= \{f : V \times E \to \mathbb{R} : f \text{ Funktion}\} \end{aligned}$$

Wir definieren die Inzidenzmatrix *$A \in \mathbb{R}^{V\times E}$ durch*

$$A_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \in e, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Date: 29. Juni 2014.

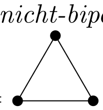
Dann

$$\begin{aligned}\nu(G) &= \max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}\\ &= \max\{\sum_{e \in E} x_e : x_e \geq 0 \ \forall e \in E,\ x_e \in \mathbb{Z} \ \forall e \in E,\ \sum_{e : v \in e} x_e \leq 1 \ \forall v \in V\}\\ &= \max\{\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}^T x : x \geq 0,\ Ax \leq \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},\ x \in \mathbb{Z}^E\}\end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass für G bipartit

$$\nu(G) = \max\{\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}^T x : x \geq 0,\ Ax \leq \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},\ x \in \underline{\mathbb{R}^E}\}$$

gilt. Im allgemeinen, nicht-bipartiten Fall kann aber „$<$“gelten.

Zum Beispiel für $G =$  *, $x_e = \frac{1}{2} \ \forall e \in E$.*

Dualitätsbeziehung:

Es gilt

$$\begin{aligned}&\max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}\\ \leq &\max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}\\ = &\min\{y^T b : y \geq 0, y^T A = c^T, y \in \mathbb{R}^m\}\\ \leq &\min\{y^T b : y \geq 0, y^T A = c^T, y \in \mathbb{Z}^m\},\end{aligned}$$

falls (PLP) und (DLP) beide zulässige Lösungen besitzen. Im Allgemeinen gilt „$<$“, wie das obige Beispiel zeigt.

Kein Wunder: LP kann *effizient* gelöst werden (in polynomieller Zeit), ILP dagegen *wahrscheinlich nicht* (Äquivalent zum P $\neq$ NP-Problem, für dessen Lösung 1.000.000 Dollar ausgeschrieben sind).

Frage: In welcher Situation gilt „$=$“?

Definition 1.3. *Ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* ganzzahlig*, falls jede Ecke z von P ganzzahlig ist, das heißt $z \in \mathbb{Z}^n$.*

Falls P ganzzahlig ist, dann gilt also

$$\max\{c^T x : x \in P, x \in \mathbb{Z}^n\} = \max\{c^T x : x \in P, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Wir suchen also Bedingungen an A und b, damit $P = \{x : Ax \leq b\}$ ganzzahlig ist.

2. Vollständig-unimodulare Matrizen

Definition 2.1. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt* vollständig-unimodular *(VU), falls jeder ihrer Minoren (Determinanten quadratischer Teilmatrizen) gleich* $0, -1$ *oder* $+1$ *ist. Insbesondere gilt für die Einträge: $A_{ij} \in \{0, -1, +1\}$.*

Satz 2.2. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$. Dann ist jede Ecke des Polyeders $P = \{x : Ax \leq b\}$ ganzzahlig.*

Beweis. Sei z eine Ecke von P. Dann hat die Teilmatrix A_z vollen Rang n und enthält darum eine $n \times n$ Teilmatrix A' mit Rang n. OBdA sei A' in den ersten n Zeilen von A enthalten. Setze $b' = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{Z}^n$, dann gilt $A'z = b'$. Nach der Cramerschen Regel ist $z_i = \frac{\det A'_i}{\det A'}$. Da $|\det A'| = 1$ und A'_i ganzzahlig ist, ist also $z_i \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkung 2.3. *Nicht jedes Polyeder hat eine Ecke.*

Definition 2.4. *Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* ganzzahlig*, falls für alle $c \in \mathbb{R}^n$, für die* $\max\{c^T x : x \in P\}$ *endlich ist, das Maximum an einem ganzzahligen Vektor angenommen wird.*

Satz 2.5. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$. Dann ist $P = \{x : Ax \leq b\}$ ein ganzzahliges Polyeder.*

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben und x^* eine optimale Lösung von $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$. Wähle $d', d'' \in \mathbb{Z}^n$ mit $d' \leq x^* \leq d''$. Dann ist $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ d' \leq x \leq d''\}$ ein Polytop. Weiter ist

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ -I \\ I \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -d' \\ d'' \end{pmatrix}\}$$

und die Matrix $\begin{bmatrix} A \\ -I \\ I \end{bmatrix}$ ist VU. Nach dem vorherigen Satz ist Q also ein ganzzahliges Polytop und außerdem wird $\max\{c^T x : x \in Q\}$ an einer Ecke $\tilde{x}$ angenommen. Da $x^* \in Q$, ist $c^T \tilde{x} \geq c^T x^*$, und weil $A\tilde{x} \leq b$, ist $\tilde{x}$ optimale Lösung von $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$. □

Korollar 2.6. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$. Dann haben die beiden linearen Programme*

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} = \min\{y^T b : y \geq 0,\ y^T A = c^T\}$$

ganzzahlige Lösungen, falls die Optima endlich sind.

Beweis. Folgt aus dem vorhergehenden Satz, weil die Matrix

$$\begin{bmatrix} -I \\ A^T \\ -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{(2n+m) \times m} \text{ VU ist.}$$

□

<u>Ziel</u>: Charakterisierung von vollständig-unimodularen Matrizen mit Hilfe von Ganzzahligkeit von Polyedern.

Satz 2.7. *(Hoffman, Kruskal 1956)*
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt
A ist VU $\Leftrightarrow$ für alle $b \in \mathbb{Z}^m$ ist $P = \{x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ ganzzahlig.

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Weil $P \subseteq \{x : x \geq 0\}$, wird $\max\{c^T x : x \in P\}$ in einer Ecke von P angenommen, falls das Maximum endlich ist ($\rightarrow$ Aufgabe 9.1). Sei z eine Ecke von P. Definiere $B = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$. Betrachte

$$Bx = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann enthält B_z eine reguläre Teilmatrix $B' \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Sei $b' \in \mathbb{Z}^n$ der entsprechende Teilvektor von $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $z = (B')^{-1} b'$ ganzzahlig aufgrund der Cramerschen Regel und weil A VU ist.

„$\Leftarrow$“: Sei A' eine reguläre $k \times k$-Teilmatrix von A. Zu zeigen: $|\det A'| = 1$.
OBdA sei A' die obere linke Teilmatrix von A. Betrachte $B \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ bestehend aus den ersten k und den letzten $m-k$ Spalten von $[A\ I_m]$, also

$$[A\ I_m] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A' & & I_k & 0 \\ \hline & & 0 & I_{m-k} \end{array}\right] \text{ und } B = \left[\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline & I_{m-k} \end{array}\right]$$

Dann ist $|\det B| = |\det A'|$.

Ziel: Zeige $B^{-1} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$.
Denn: Weil dann $\det B^{-1} \in \mathbb{Z}$ und $\det B \cdot \det B^{-1} = 1$, muss $|\det B| = 1$ sein.
Sei $i \in \{1, \ldots, m\}$. Wir zeigen, dass die i-te Spalte von B^{-1} ganzzahlig ist: Wähle $y \in \mathbb{Z}^m$ mit $y + B^{-1} e_i \geq 0$ und setze $z = y + B^{-1} e_i$. Dann ist $Bz = By + e_i \in \mathbb{Z}^m$. Setze $b = Bz$. Füge in z hinter den ersten k Komponenten $n - k + k$ Nullen ein und nenne diesen Vektor z'. Dann gilt nach Konstruktion

$$[A\ I] z' = Bz = b.$$

Da $z' \geq 0$, liegt der Vektor z'', der aus den ersten n Komponenten von z' besteht, in $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$. Das heißt es gilt

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} z'' \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die ersten k und die letzten $n-k$ dieser Ungleichungen sind mit Gleichheit erfüllt. Da die entsprechenden Zeilen von $\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$ linear unabhängig sind, ist also z'' eine Ecke von P. Nach Voraussetzung ist $z'' \in \mathbb{Z}^n$. Auf den ersten n Komponenten stimmen z' und z'' überein. Die letzten m Komponenten von z' sind durch $b - Az''$ gegeben und also auch ganzzahlig. Also ist $z \in \mathbb{Z}^m$ und somit auch $B^{-1} e_i = z - y \in \mathbb{Z}^m$.

□

3. Vollständig-unimodulare Matrizen und bipartite Graphen

Satz 3.1. *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann gilt*
G ist bipartit $\Leftrightarrow$ Die Inzidenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ ist VU.

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Sei B eine $t \times t$ Teilmatrix von A.

Zeige: $\det B \in \{-1, 0, +1\}$ per Induktion nach t.

$t = 1$: ✓

$t > 1$:

1.Fall: B enthält eine Nullspalte. Dann ist $\det B = 0$.

2.Fall: B enthält eine Spalte, die genau eine 1 enthält. Dann ist B (nach eventueller Permutation von Zeilen und Spalten) von der Form

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b^T \\ 0 & B' \end{bmatrix}, \; b \in \mathbb{R}^{t-1}, \; B' \in \mathbb{R}^{(t-1)\times(t-1)}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\det B' \in \{-1, 0, +1\}$. Also auch $\det B \in \{-1, 0, +1\}$.

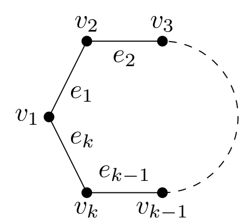
3.Fall: Jede Spalte von B enthält genau zwei Einsen. Da G bipartit ist, kann man (nach eventueller Permutation der Zeilen) B als

$$B = \begin{bmatrix} B' \\ B'' \end{bmatrix}$$

schreiben, wobei jede Spalte von B' genau eine 1 enthält und jede Spalte von B'' genau eine 1 enthält. Aufaddieren aller Zeilen von B' ergibt den Vektor $(1, \ldots, 1)$. Genauso wie Aufaddieren aller Zeilen von B''. Das heißt die Zeilen von B sind linear abhängig, also $\det B = 0$.

„$\Leftarrow$“: Sei A VU. Angenommen G ist nicht bipartit. Dann enthält G einen Kreis ungerader Länge mit Knoten $v_1, \ldots, v_k$ und Kanten $e_1, \ldots, e_k$. Die entsprechende Teilmatrix von A (mit Zeilen $v_1, \ldots, v_k$ und Spalten $e_1, \ldots, e_k$) ist von der Form:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_k \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & \ldots & e_{k-1} & e_k \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



Zum Beispiel durch Entwicklung nach der k-ten Spalte sieht man, dass die Determinante dieser Matrix gleich $(+1)\cdot 1 + (+1)\cdot 1 = 2$ ist (k ist ungerade!). Also kann A nicht VU sein.

□

Korollar 3.2. *(Matching-Theorem von König; siehe Kapitel 3.3)*
Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\} \\ &= \min\{|U| : U \subseteq V \text{ Knotenüberdeckung in } G\} \\ &= \tau(G). \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\nu(G) &= \max\{\sum_{e\in E} x_e : x_e \geq 0\ \forall e \in E,\ x_e \in \mathbb{Z},\ \sum_{e: v\in e} x_e \leq 1\ \forall v \in V\}\\
&= \max\{1^T x : x \in \mathbb{Z}^E,\ x \geq 0,\ Ax \leq 1\}\\
&= \max\{1^T x : x \in \mathbb{R}^E,\ x \geq 0,\ Ax \leq 1\} \quad \text{(nach Hoffman.Kruskal, weil } A \text{ VU ist)}\\
&= \min\{1^T y : y \in \mathbb{R}^V,\ y \geq 0,\ y^T A \geq 1\} \quad \text{(LP Dualität)}\\
&= \min\{1^T y : y \in \mathbb{Z}^V,\ y \geq 0,\ y^T A \geq 1\} \quad \text{(Hoffman-Kruskal)}\\
&= \min\{\sum_{v\in V} y_v : y_v \in \mathbb{Z},\ y_v \geq 0\ \forall v \in V,\ y_u + y_v \geq 1\ \forall \{u,v\} \in E\}\\
&= \tau(G).
\end{aligned}$$

Ein Vektor $y \in \mathbb{Z}^V$, der das Minimum erzielt, hat nur 0/1- Komponenten. Hierbei ist $y_v = 1 \Leftrightarrow v$ ist Knoten in einer minimalen Knotenüberdeckung. □

Korollar 3.3. *Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann*

$$\mathit{conv}\{\chi^M : M \subseteq E \text{ Matching in } G\} = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0,\ Ax \leq 1\},$$

wobei A die Inzidenzmatrix von G ist.

Beweis.

<u>„⊆“</u>: ✓

<u>„⊇“</u>: $Q = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0,\ Ax \leq 1\}$ ist beschränkt, also ein Polytop und somit ist Q die konvexe Hülle seiner Ecken. Da A VU ist, sind alle Ecken von Q ganzzahlig. Und jeder ganzzahlige Vektor in Q ist Inzidenzvektor eines Matchings in G.

□

Korollar 3.4. *(Theorem von Egaváry (1931))*
Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph und $w\colon E \to \mathbb{Z}$ eine Gewichtsfunktion. Dann ist

$$\begin{aligned}
\nu_W(G) &= \max\{w(M) : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}\\
&= \min\{\sum_{v\in V} y_v : y \in \mathbb{Z}^V,\ y \geq 0,\ y_u + y_v \geq w(\{u,v\})\ \forall \{u,v\} \in E\}.
\end{aligned}$$

Beweis. Weil die Inzidenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{V\times E}$ von G VU ist, gilt

$$\max\{w^T x : x \geq 0,\ Ax \leq 1\} = \min\{1^T y : y \geq 0\ y^T A \geq w\},$$

wobei beide Probleme optimale ganzzahlige Lösungen haben. □

4. Vollständig-unimodulare Matrizen und gerichtete Graphen

Definition 4.1. *Die* Inzidenzmatrix *eines gerichteten Graphen $D = (V, A)$ ist $M \in \mathbb{R}^{V\times A}$ mit*

$$M_{v,a} = \begin{cases} +1, & \textit{falls } a \in \delta^-(v) \qquad \xrightarrow{a}\bullet\, v \\ -1, & \textit{falls } a \in \delta^+(v) \qquad v\,\bullet\!\xrightarrow{a} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Jede Spalte von M enthält genau eine $+1$ und genau eine -1.

Satz 4.2. *M ist VU.*

Beweis. Sei $B \in \mathbb{R}^{t\times t}$ eine Teilmatrix von M. Zeige per Induktion nach t, dass det $B \in \{-1, 0, +1\}$.

<u>$t = 1$</u>: ✓

<u>$t > 1$</u>:

<u>1.Fall</u>: B hat eine Nullspalte $\Rightarrow$ det $B = 0$.

<u>2.Fall</u>: B hat eine Spalte, die genau einen Eintrag $\neq 0$ enthält.
Dann, nach eventueller Vertauschung von Zeilen und Spalten, ist

$$B = \begin{bmatrix} \pm 1 & b^T \\ 0 & B' \end{bmatrix},\ b \in \mathbb{R}^{t-1},\ B' \in \mathbb{R}^{(t-1)\times(t-1)}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist det $B' \in \{-1, 0, +1\}$,
also det $B = (\pm 1)\cdot$ det $B' \in \{-1, 0, +1\}$.

<u>3.Fall</u>: Jede Spalte von B enthält zwei Einträge $\neq 0$. Aufaddieren sämtlicher Zeilen von B ergibt 0, das heißt det $B = 0$.

□

Korollar 4.3. *(Max-flow-min-cut Theorem)*
Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$ und $c \colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Kapazitätsfunktion. Dann

$$\begin{array}{lcl} \max \mathit{value}(f) & = & \min c(\delta^+(U)) \\ \quad f \text{ ist } s\text{-}t\text{-Fluss} & & \quad U \subseteq V \\ \quad 0 \leq f \leq c & & \quad s \in U, t \notin U. \end{array}$$

Beweis.

<u>max $\leq$ min</u>: ✓

<u>max $\geq$ min</u>: Sei $M \in \mathbb{R}^{V\times A}$ die Inzidenzmatrix von D und sei M' die Matrix, die man durch Streichen der zu s und t gehörenden Zeilen aus M bekommt. Dann gilt

$$f \in \mathbb{R}^A \text{ ist } s\text{-}t\text{-Fluss } \Leftrightarrow M'f = 0.$$

Sei $w^T \in \mathbb{R}^A$ die zu t gehörende Zeile von M. Dann ist

$$\text{value}(f) = w^T f.$$

Also

$$\begin{aligned} \max_{\substack{f \text{ ist } s\text{-}t\text{-Fluss} \\ 0 \leq f \leq c}} \text{value}(f) &= \max\{w^T f : 0 \leq f \leq c,\ M'f = 0\} \\ &\overset{(1)}{=} \min\{y^T c : y \geq 0,\ z \in \mathbb{R}^{V\setminus\{s,t\}},\ y^T + z^T M' \geq w^T\} \\ &= \min\{y^T c : (y^T\ z^T) \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & M' \end{bmatrix} \geq (0\ w^T)\}, \end{aligned}$$

wobei (1) nach LP Dualität gilt. Die Matrix $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & M' \end{bmatrix}$ ist VU und der Vektor $(0\ w^T)$ ist ganzzahlig, also wird das Maximum an ganzzahligen Vektoren y^*, z^* angenommen. Erweitern wir z^* zu $z^{**} \in \mathbb{Z}^V$ durch $z_t^{**} = -1$ und $z_s^{**} = 0$ und $z_v^{**} = z_v^* \ \forall v \in V \setminus \{s,t\}$, so gilt $(y^*)^T + (z^{**})^T M \geq 0$, denn

$$\begin{aligned} [(y^*)^T + (z^{**})^T M]_a &= \underbrace{y_a^* + [(z^*)^T M']_a}_{\geq w_a} + \underbrace{z_s^{**}}_{=0} \cdot M_{s,a} + \underbrace{z_t^{**}}_{=-1} \cdot M_{t,a} \\ &\geq w_a + (-1) \cdot \underbrace{M_{t,a}}_{=w_a} = 0. \end{aligned}$$

Setze $U = \{v \in V : z_v^{**} \geq 0\}$. Dann ist $s \in U,\ t \notin U$.

Behauptung: $\sum_{a \in \delta^+(U)} c(a) \leq (y^*)^T c$ ($=$ max value(f)).

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass falls $a \in \delta^+(U)$, dann $y_a^* \geq 1$. Da $z^{**} \in \mathbb{Z}^V$, gilt für $a = (u,v) \in \delta^+(U)$:

$$z_u^{**} \geq 0, \quad z_v^{**} \leq -1 \text{ nach Definition von } U.$$

Wegen $[(y^*)^T + (z^{**})^T M]_a \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} &y_a^* + z_v^{**} - z_u^{**} \geq 0, \text{ das heißt} \\ &y_a^* \geq z_u^{**} - z_v^{**} \geq 1. \end{aligned}$$

□

Prof. Dr. F. Vallentin, Dr. A. Gundert, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90, 50931 Köln, Deutschland
E-mail address: frank.vallentin@uni-koeln.de, anna.gundert@uni-koeln.de