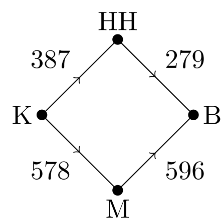
KAPITEL 2 — KÜRZESTE WEGE

F. VALLENTIN, A. GUNDERT

Das Ziel dieses Kapitels ist es kürzeste Wege in einem gegebenen Netzwerk zu verstehen und zu berechnen.
Ein einführendes Beispiel für ein Netzwerk zwischen den vier Städten Köln (K), Hamburg (HH), München (M) und Berlin (B) ist der folgende Graph:



Die Zahlen an den Kanten geben Entfernungen zwischen den Städten an. Ein Ziel könnte zum Beispiel sein, den kürzesten Weg von Köln nach Berlin zu finden, welcher in diesem Netzwerk auch leicht ohne jede Methodik zu erkennen ist. In größeren Netzwerken sind kürzeste Wege jedoch nicht immer per Auge zu sehen. Daher lernen wir systematische Verfahren kennen, kürzeste Wege zu berechnen. Dafür benötigen wir zunächst etwas Notation.

1. Nichtnegative Kantenlängen

Notation 1.1. *Wir nennen*

$$D = (V, A) \text{ \emph{einen} gerichteten Graph}$$

wobei

$$V \text{ \emph{eine endliche Menge von} Knoten}$$

und

$$A \subseteq \{(v, w) \in V \times V : v \neq w\} \text{ \emph{eine Menge} gerichteter Kanten \emph{ist.}}$$

Auf den Kanten definieren wir Kantenlängen *durch eine Längenfunktion*

$$l\colon A \to \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}$$

$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_m, v_m)$ *heißt* Kantenfolge, *falls* $v_0, \ldots, v_m \in V,\ a_1, \ldots, a_m \in A$ *und* $a_i = (v_{i-1}, v_i)$. *Wir nennen* v_0 Startknoten *und* v_m Endknoten.

Die Länge *von* P *definieren wir als*

$$l(P) = \sum_{i=1}^{m} l(a_i)$$

Wenn $|\{v_0, \ldots, v_m\}| = m + 1$ *(d.h. die Knoten sind alle paarweise verschieden), heißt* P v_0-v_m-Weg *oder kurz* Weg.

Date: 5. Mai 2014.

Für Knoten $s, t \in V$ *ist der* Abstand *von* s *zu* t *definiert als*

$$dist(s,t) := \min_{P \text{ ist } s\text{-}t\text{-Weg}} l(P).$$

Für eine Knotenmenge $U \subseteq V$ *setze*

$$\delta^+(U) := \{(v,w) \in A : v \in U, w \notin U\}$$

als die Menge der Kanten*, die* U *verlassen und*

$$\delta^-(U) := \{(v,w) \in A : v \notin U, w \in U\}$$

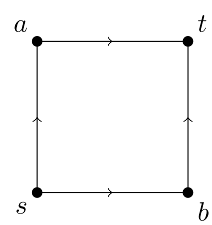
als die Menge der Kanten*, die* U *betreten.*

Eine Kantenmenge $A' \subseteq A$ *heißt* s-t-Schnitt*, falls*

$$A' = \delta^+(U)$$

für ein $U \subseteq V$ *und* $s \in U$, $t \notin U$.

Beispiel 1.2. *Wir bestimmen in dem Graph*



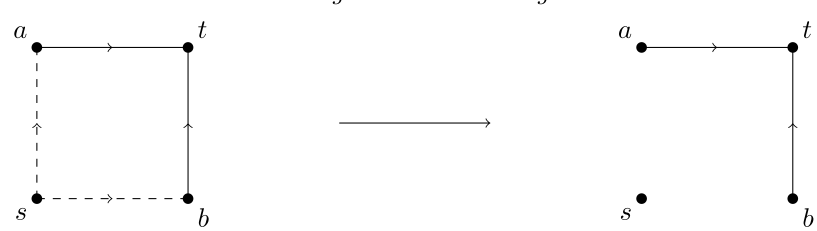
alle s-t-Schnitte. Alle Teilmengen der Knoten, die s *enthalten, aber nicht* t*, sind*

$$U_1 = \{s\}\ ,\ U_2 = \{s,a\}\ ,\ U_3 = \{s,b\}\ ,\ U_4 = \{s,a,b\}.$$

Alle s-t-Schnitte haben die Form $\delta^+(U_i)$ *für* $i = 1, \ldots, 4$. *Also bekommen wir die vier s-t-Schnitte*

$$\begin{aligned}
\delta^+(U_1) &= \{(s,a),(s,b)\}\\
\delta^+(U_2) &= \{(s,b),(a,t)\}\\
\delta^+(U_3) &= \{(s,a),(b,t)\}\\
\delta^+(U_4) &= \{(a,t),(b,t)\}
\end{aligned}$$

Noch mal zur Verdeutlichung: s-t-Schnitte sind Kantenmengen*, die jedoch durch Knotenmengen bestimmt sind. Die Kanten in einem s-t-Schnitt trennen eine Teilmenge der Knoten, die* s *enthält, vom Rest der Knoten, welcher* t *enthält: Nach Entfernen der Kanten im Schnitt gibt es keinen Weg mehr von* s *nach* t.

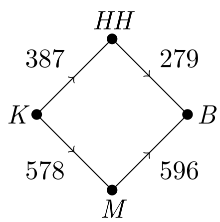


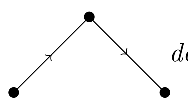
In diesem Beispiel haben wir die Kanten aus $\delta^+(U_1)$ *(gestrichelt) entfernt. In dem resultierenden Graphen rechts gibt es keinen s-t-Weg mehr.*

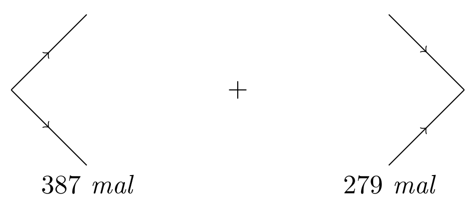
Satz 1.3. *(min-max-Charakterisierung kürzester Wege,* Robacker *1965)*
Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph $s, t \in V$ zwei Knoten und $l\colon A \to \mathbb{Z}$ eine Längenfunktion. Dann gilt:

$$
\begin{array}{rcll}
dist(s,t) & = & \min & l(P) \\
 & & & P \text{ ist } s\text{-}t\text{-Weg} \\
 & & & \\
 & = & \max & k, \text{ wobei} \\
 & & & k = \text{ Anzahl von } s\text{-}t\text{-Schnitten } C_1, \ldots, C_k \text{ (mit Vielfachheiten),} \\
 & & & \quad \text{so dass für alle } a \in A \text{ gilt:} \\
 & & & |\{j = 1, \ldots, k : a \in C_j\}| \leq l(a)
\end{array}
$$

Bemerkung 1.4. *Die s-t-Schnitte geben ein Zertifikat, dass ein gegebener s-t-Weg minimal ist. In dem Beispiel*



ist  *der kürzeste K-B-Weg, weil es folgende K-B-Schnitte gibt:*



Beweis. (Satz 1.3)
Falls es keinen s-t-Weg gibt, ist die Aussage trivial: Beide Seiten sind gleich $+\infty$.
Im folgenden existiere ein s-t-Weg:

<u>min $\geq$ max</u>: Sei $P = (v_0, a_1, v_1, \ldots, a_m, v_m)$ ein s-t-Weg und seien $C_1, \ldots, C_k$ s-t-Schnitte mit oben genannter Eigenschaft. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
l(P) = \sum_{i=1}^{m} l(a_i) &\geq \sum_{i=1}^{m} |\{j = 1, \ldots, k : a_i \in C_j\}| \\
&= \sum_{j=1}^{k} |C_j \cap \{a_1, \ldots, a_m\}| \\
&\geq \sum_{j=1}^{k} 1 = k
\end{aligned}
$$

<u>min $\leq$ max</u>: Definiere

$$U_i = \{v \in V : \ \mathrm{dist}(s, v) < i\} \quad \text{für } i = 1, \ldots, \ \mathrm{dist}(s, t) = \min .$$

Definiere
$$C_i = \delta^+(U_i) = \{(v,w) \in A : v \in U_i, w \notin U_i\}.$$
Dies sind $\operatorname{dist}(s,t)$ viele s-t-Schnitte. Es sei $a = (u,v) \in A$ eine Kante. Dann gilt:
$$l(a) = \operatorname{dist}(s,v) - \operatorname{dist}(s,u).$$
Andererseits enthalten nur die s-t-Schnitte
$$C_{\operatorname{dist}(s,u)+1}, \ldots, C_{\operatorname{dist}(s,v)}$$
diese Kante a, was $\operatorname{dist}(s,v)-$ $\operatorname{dist}(s,u)$ viele sind. □

2. Beliebige Kantenlängen

Manchmal sind auch negative Kantenlängen nützlich. Zum Beispiel wenn man einen längsten s-t-Weg finden will (also einen kürzesten negativen Weg).

Beispiel 2.1. *Rucksackproblem*
Wir haben einen Rucksack mit $2,5l$ Volumen und 5 nützliche Gegenstände.

Gegenstand i	*Volumen a_i*	*Nutzen c_i*
1 *: Schlafsack*	$1,5l$	4
2 *: Taschenmesser*	$0,5l$	4
3 *: Kekse*	$1l$	3
4 *: Thermoskanne*	$1,5l$	5
5 *: Isomatte*	$1l$	4

Aufgabe: Finde eine Auswahl von $1,\ldots,5$, so dass die Gegenstände in den Rucksack passen und ihr summierter Nutzen maximal ist.

Formulierung als kürzeste Wege Problem:
Wir erstellen einen Graphen $D = (V,A)$ mit Kantenlängen wie folgt:

$$\underline{\text{Knoten}}: \quad (i,x) \in V \quad i = 0,1,\ldots,6\,, \quad x = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, \frac{5}{2}$$
$$\underline{\text{Kanten}}: \text{- } ((i-1,x),(i,x)) \ \textit{mit Länge } 0 \quad i = 1,\ldots,5$$
$$\text{- } ((i-1,x),(i,x+a_i)) \ \textit{mit Länge } -c_i \quad i = 1,\ldots,5$$
$$\text{- } ((5,x),(6,\frac{5}{2})) \ \textit{mit Länge } 0 \quad \textit{für alle } x$$

Dann: Kürzeste $(0,0)$-$(6,\frac{5}{2})$-Wege in D geben eine optimale Auswahl.

Input : Gerichteter Graph $D = (V, A)$, $n = |V|$, $s \in V$, $l\colon A \to \mathbb{Z}$
Output : Funktionen $d_0, \ldots, d_n\colon V \to \mathbb{Z}$, $g\colon V \setminus \{s\} \to V$
Setze $d_0(s) = 0$, $d_0(v) = \infty \ \forall v \in V \setminus \{s\}$.
for $k = 0$ ***to*** $n - 1$ **do**
  $d_{k+1}(v) = d_k(v) \ \forall v \in V$
  for $(u, v) \in A$ **do**
    if $d_{k+1}(v) > d_k(u) + l(u, v)$ **then**
      $d_{k+1}(v) = d_k(u) + l(u, v)$
      $g(v) = u$
    end
  end
end
if $d_n \neq d_{n-1}$ **then**
  Ausgabe: „Es gibt einen Kreis negativer Länge, der von s aus erreichbar ist“.
end

Algorithmus 1 : Bellman-Ford Algorithmus

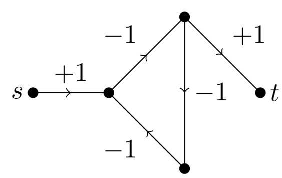
Satz 2.2. *Es gilt*

$$d_k(v) = \min\{l(P) : P \text{ ist } s\text{-}v\text{-Kantenfolge, die höchstens } k \text{ Kanten enthält}\}.$$

Beweis. (triviale) Induktion nach k. □

Mögliches Problem: gerichtete Kreise negativer Länge.

Beispiel 2.3. *In dem Graph*



existiert keine kürzeste s-t-Kantenfolge, weil der negative Kreis beliebig oft durchlaufen werden kann.

Definition 2.4. *Eine Kantenfolge $P = (v_0, a_1, v_1, \ldots, a_m, v_m)$ heißt (*gerichteter*)* Kreis*, falls $v_0 = v_m$ und $|\{v_0, \ldots, v_m\}| = m$.*

Satz 2.5. *Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Längenfunktion $l\colon A \to \mathbb{Z}$. Alle gerichteten Kreise in D haben nicht-negative Länge. Seien s, t durch (mindestens) eine Kantenfolge verbunden. Dann existiert eine kürzeste s-t-Kantenfolge, die ein Weg ist.*

Beweis. Klar ist, dass ein kürzester s-t-Weg P existiert. Angenommen es gibt eine s-t-Kantenfolge Q (die kein Weg ist) mit $l(P) > l(Q)$. Wähle ein solches Q mit minimaler Anzahl von Kanten. Da Q kein Weg ist, enthält Q einen Kreis C, der nach Voraussetzung nicht-negative Länge hat, also $l(C) \geq 0$. Sei Q' die Kantenfolge, die man aus Q erhält, indem man C löscht. Dann ist Q' ebenfalls eine s-t-Kantenfolge mit

$$l(Q') = l(Q) - l(C) \leq l(Q) < l(P),$$

aber mit weniger Kanten als Q. Widerspruch! □

<u>Zurück zu Bellman-Ford</u>:

- Laufzeit: proportional zu $|V| \cdot |A| \leq |V|^3$
- Falls D keine gerichteten Kreise negativer Länge enthält, dann gilt $d_{n-1}(v) = \mathrm{dist}(s, v)$ und $v, g(v), g(g(v)), \ldots, s$ ist die Umkehrung eines kürzesten s-t-Weges.

Satz 2.6. *$d_n = d_{n-1} \iff$ alle von s aus erreichbaren Kreise haben nicht-negative Länge.*

Beweis. Aufgabe 3.1. □

3. Geometrische Modellierung, Potentiale

Definition 3.1. *Eine Funktion $p\colon V \to \mathbb{R}$ heißt* Potential *für D, l, falls*

$$\forall a = (u, v) \in A : \quad p(v) - p(u) \leq l(a)$$

Satz 3.2. *Es existiert genau dann ein Potential $p\colon V \to \mathbb{R}$ für D, l, wenn für alle gerichteten Kreise C in D gilt, dass $l(C) \geq 0$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $C = (v_0, a_1, v_1, \ldots, a_m, v_m)$ mit $v_0 = v_m$ ein Kreis und sei p eine Potentialfunktion. Dann gilt:

$$l(C) = \sum_{i=1}^{m} l(a_i) \geq \sum_{i=1}^{m} (p(v_i) - p(v_{i-1})) = 0$$

„$\Leftarrow$“: Füge zu $D = (V, A)$ einen neuen Knoten $\tilde{s}$ und neue Kanten $(\tilde{s}, t)$ für alle $t \in V$ hinzu, wobei $l(\tilde{s}, t) = 0$ definiert wird. Dann ist $p(t) = \mathrm{dist}(\tilde{s}, t)$ eine Potentialfunktion. Denn

$$\begin{aligned} \forall a = (u, v) \in A : \quad p(v) - p(u) &= \mathrm{dist}(\tilde{s}, v) - \mathrm{dist}(\tilde{s}, u) \leq l(a) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{dist}(\tilde{s}, v) \leq \mathrm{dist}(\tilde{s}, u) + l(a). \end{aligned}$$

Dies gilt, denn

$$\overbrace{\underset{\tilde{s}}{\bullet} \to \bullet \to \bullet \cdots \bullet \to \underset{u}{\bullet}}^{\mathrm{dist}(\tilde{s}, u)} \to \underset{v}{\bullet}$$

ist eine $\tilde{s}$-v-Kantenfolge der Länge $\mathrm{dist}(\tilde{s}, u) + l(a)$ und, weil alle gerichteten Kreise nicht-negative Länge haben, gibt es eine kürzeste $\tilde{s}$-v-Kantenfolge, die ein Weg ist, also:

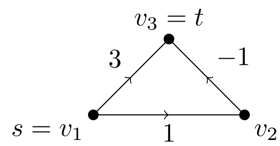
$$\mathrm{dist}(\tilde{s}, v) \leq \mathrm{dist}(\tilde{s}, u) + l(a).$$

□

Satz 3.3. *(geometrische Modellierung kürzester Wege mit linearen Ungleichungen) Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, $l\colon A \to \mathbb{Z}$ eine Längenfunktion. Alle gerichteten Kreise haben nicht-negative Länge. Seien $s, t \in V$ und es gebe einen s-t-Weg. Dann gilt*

$$\begin{array}{rcll} \mathit{dist}(s, t) & = & \min & l(P) \\ & & & P \textit{ ist } s\text{-}t\text{-}Weg \\[1em] & = & \max & p(t) - p(s) \\ & & & p\colon V \to \mathbb{R} \\ & & & p(v) - p(u) \leq l(a) \ \forall a = (u, v) \in A \end{array}$$

Beispiel 3.4. *Wir wenden den Satz auf den Graphen*



an. Man erhält

$$\begin{aligned} dist(v_1, v_3) &= \max \quad p_3 - p_1 \\ & \quad p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R} \\ & \quad p_2 - p_1 \leq 1 \\ & \quad p_3 - p_1 \leq 3 \\ & \quad p_3 - p_2 \leq -1 \\ &= \max \quad (-1, 0, 1)p \\ & \quad p \in \mathbb{R}^3 \\ & \quad (-1, 1, 0)p \leq 1 \\ & \quad (-1, 0, 1)p \leq 3 \\ & \quad (0, -1, 1)p \leq -1 \end{aligned}$$

Dabei schreiben wir $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ *als Vektor statt als Funktion, womit gemeint ist, dass jedem Funktionswert* $p(v_i)$ *genau ein Eintrag* p_i *zugeordnet wird. Auf diese Schreibweise wird bei geometrischer Modellierung von graphentheoretischen Problemen häufig zurückgegriffen.*

Beweis. (Satz 3.3)
$\underline{\max \leq \min}$: Sei $P = (s = v_0, a_1, v_1, \ldots, a_m, v_m = t)$ eine s-t-Kantenfolge und $p\colon V \to \mathbb{R}$ ein Potential. Dann gilt

$$l(P) = \sum_{i=1}^{m} l(a_i) \geq \sum_{i=1}^{m} (p(v_i) - p(v_{i-1})) = p(t) - p(s)$$

$\underline{\max \geq \min}$: Setze $p(v) = \mathrm{dist}(s, v)$, falls eine s-v-Kantenfolge existiert und $p(v) = 0$ sonst. Analog wie im Beweis von Satz 3.2 überprüft man, dass p ein Potential ist. □

Prof. Dr. F. Vallentin, Dr. A. Gundert, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90, 50931 Köln, Deutschland
E-mail address: `frank.vallentin@uni-koeln.de, anna.gundert@uni-koeln.de`