Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2014

— Aufgabenblatt 9 —

Aufgabe 9.1 Sei P ein Polyeder und sei $c \in \mathbb{R}^n$. Zeige: Ist $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$, so wird $\max\{c^\mathsf{T} x : x \in P\}$ in einer Ecke von P angenommen, falls das Maximum endlich ist.

Aufgabe 9.2 Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Wir betrachten das *primale und das duale LP*, (PLP) und (DLP):

$$\begin{array}{llcll} p^* = \max & c^\mathsf{T} x & & d^* = \min & y^\mathsf{T} b & \\ & x \in \mathbb{R}^n & \text{(PLP)} & & y \in \mathbb{R}^m & \text{(DLP)} \\ & Ax \leq b & & & y \geq 0 & \\ & & & & y^\mathsf{T} A = c^\mathsf{T} & \end{array}$$

Sei x zulässig für (PLP) und y zuässig für (DLP). Zeige:

a) Es gilt $y^\mathsf{T}(Ax - b) = 0$ genau dann, wenn x optimal für (PLP) und y optimal für (DLP) ist.

b) Ist x optimal für (PLP) und y optimal für (DLP), dann gelten die Komplementaritätsbedingungen:
$$y_j \neq 0 \Rightarrow (Ax - b)_j = 0 \quad \text{und} \quad (Ax - b)_j \neq 0 \Rightarrow y_j = 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 9.3 Gegeben sei eine Matrix, ein Spaltenvektor und ein Zeilenvektor

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, (d \;\; e \;\; f)$$

wobei $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ Matrizen, a, b, c Spaltenvektoren und d, e, f Zeilenvektoren sind. Zeige, dass dann die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{array}{rcl} \max\{dx + ey + fz : x \geq 0, z \leq 0, & = & \min\{ua + vb + wc : u \geq 0, w \leq 0, \\ Ax + By + Cz \leq a, & & uA + vD + wG \geq d, \\ Dx + Ey + Fz = b, & & uB + vE + wH = e, \\ Gx + Hy + Kz \geq c\} & & uC + vF + wK \leq f\}, \end{array}$$

unter der Annahme, dass beide Mengen nicht leer sind.

Aufgabe 9.4 Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und sei $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ seine Inzidenzmatrix. Dualisiere das folgende Programm:

$$\max \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T} x \;:\; x \geq 0, Ax \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^E \right\}.$$

Abgabe: Bis Dienstag, 17. Juni, 12:00 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.