Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2014

— Aufgabenblatt 10 —

Aufgabe 10.1 Zeige: Ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ganzzahlig, wenn das lineare Programm $\max\{c^{\mathsf{T}}x : x \in P\}$ für jeden Vektor c eine ganzzahlige optimale Lösung besitzt.

Aufgabe 10.2 Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine vollständig unimodulare Matrix mit n Spalten $a_1, \ldots, a_n$. Zeige: Man kann die Menge $\{1, \ldots, n\}$ in zwei Klassen I, J so partitionieren, dass

$$\sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} a_j \in \{-1, 0, +1\}^m$$

gilt.

Aufgabe 10.3 Verwende die vollständige Unimodularität der Inzidenzmatrizen von bipartiten Graphen, um für einen bipartiten Graph $G = (V, E)$ zu zeigen:

$$\mathrm{conv}\Big\{\chi^M : M \text{ perfektes Matching in } G\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \sum_{e : e \ni v} x_e = 1 \text{ für } v \in V\Big\}.$$

Dabei ist ein *perfektes Matching* ein Matching $M \subseteq E$ mit $|M| = |V|/2$.

Aufgabe 10.4 Es sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Eine *unabhängige Menge* $U \subseteq V$ ist eine Teilmenge der Knotenmenge für die gilt: $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in U$. Die *Unabhängigkeitszahl* von G ist definiert als

$$\alpha(G) = \max\Big\{|U| : U \text{ ist unabhängig}\Big\}.$$

Finde eine Min-Max-Relation für α.

Abgabe: Bis Dienstag, 24. Juni, 12:00 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.