Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2014

— Aufgabenblatt 11 —

Aufgabe 11.1 Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und seien $c, d \in \mathbb{Z}^A$. Angenommen, es gibt eine Zirkulation (siehe Aufgabe 5.1 für die Definition) $f \in \mathbb{R}^A$ mit $c \leq f \leq d$. Zeige mit Hilfe der vollständigen Unimodularität der Inzidenzmatrix M von D, dass es auch eine ganzzahlige Zirkulation $g \in \mathbb{Z}^A$ mit $c \leq g \leq d$ gibt.

Aufgabe 11.2 Sei

$$P = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax \leq b\} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Polyeder. Sei

$$\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

die Projektion auf die letzten beiden Koordinaten. Berechne die Projektion $\pi(P)$.

Aufgabe 11.3 Löse das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{ll} \max & c^{\mathsf{T}} x \\ & x \in \mathbb{R}^3 \\ & Ax \leq b \end{array} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & -15 & 10 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Gebe sowohl den optimalen Wert als auch die Menge aller optimalen Lösungen an.

Aufgabe 11.4 Zeige, dass das lineare Ungleichungssystem

$$Ax \leq b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -3 & -3 \\ 2 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

keine Lösung besitzt, indem Du einen Vektor $y \geq 0$ mit $y^{\mathsf{T}} A = 0$ und $y^{\mathsf{T}} b < 0$ bestimmst.

Abgabe: Bis Dienstag, 1. Juli, 12:00 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.