D.h. $\nexists x_0 : \begin{bmatrix} A \\ -c^T \end{bmatrix} x_0 \le \begin{bmatrix} b \\ -p^* \end{bmatrix}$. Nach Farkas Lemma

$\exists \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \ge 0 : (y^T \ \lambda) \begin{bmatrix} A \\ -c^T \end{bmatrix} = 0$ und $(y^T \ \lambda) \begin{pmatrix} b \\ -p^* \end{pmatrix} < 0$.

Dann

$$\lambda p^* = \sup \{ \lambda c^T x : Ax \le b \} = \sup \{ y^T A x : Ax \le b \}$$
$$\le y^T b < \lambda p^*. \ \lightning$$

<u>2. Beh.:</u> $\exists y_0 \ge 0 : y_0^T A = c^T$ und $y_0^T b \le p^*$.

<u>Bew.:</u> Ang. ein solches y_0 gibt es nicht. Dann hat

$$(y_0^T \ \lambda) \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (c^T \ p^*)$$

keine Lösung mit $(y_0^T \ \lambda) \ge (0 \ 0)$. Nach Farkas Lemma

$\exists \begin{pmatrix} z \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mu \end{pmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $(c^T \ p^*) \begin{bmatrix} z \\ \mu \end{bmatrix} < 0$.

<u>1. Fall:</u> $\mu = 0$

Dann ist $Az \ge 0$ und $c^T z < 0$. Nach Vor. hat $Ax \le b$ eine Lösung x_0. Dann ist für großes τ:

$$A(x_0 - \tau z) \le b \quad \text{und} \quad c^T(x_0 - \tau z) > p^*. \ \lightning$$

2\. Fall: $\mu > 0$

oBdA $\mu = 1$ (durch Skalieren)

Dann: $Az + b \geq 0$ und $c^T z + p^* < 0$. Also

$A(-z) \leq b$ und $c^T(-z) > p^*$. $\lightning$ $\boxtimes$

Korollar $\max\{c^T x : x \geq 0, Ax = b\}$

$= \min\{y^T b : y^T A \geq c^T\}$, falls beide Mengen gültiger Lösungen nicht leer sind.

Bew.: Setze $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dann

$$\max\{c^T x : x \geq 0, Ax = b\}$$

$$= \max\{c^T x : \tilde{A} x \leq \tilde{b}\}$$

$$= \min\{z^T \tilde{b} : z \geq 0, z^T \tilde{A} = c^T\}$$

$$\overset{z = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}{=} \min\{u^T b - v^T b : u, v, w \geq 0, u^T A - v^T A - w^T = c^T\}$$

$$\overset{y = u - v}{=} \min\{y^T b : y^T A \geq c^T\}. \quad \boxtimes$$

Kapitel 6: Ganzzahlige Optimierung und vollständig unimodulare Matrizen

§1 Ganzzahlige lineare Programme

Viele Optimierungsprobleme im OR lassen sich als ganzzahlige lineare Programme formulieren.

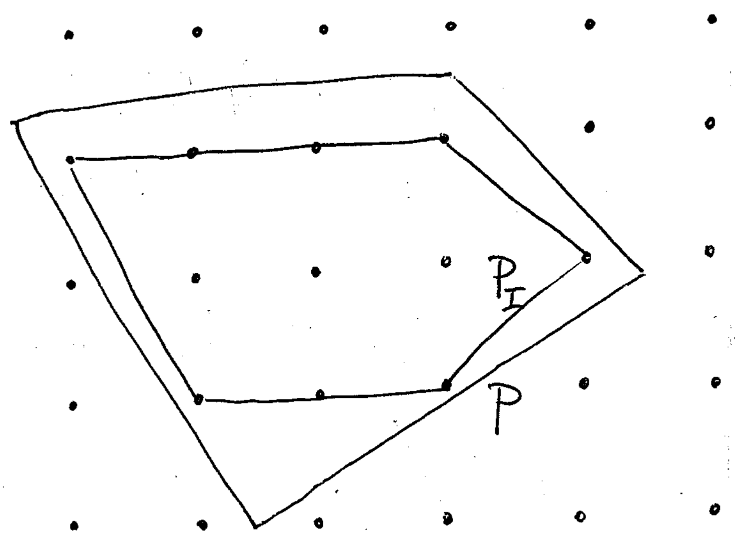
DEF.: Ein ganzzahliges LP (in Standardform) ist von der Form:

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & x \in \mathbb{Z}^n \qquad (\text{"x ganzzahlig"}) \\ & Ax \leq b. \end{aligned}$$

Heisst auch ILP = IP = "integer linear program".

(→ Maximiere eine lineare Funktion über die ganzzahligen Punkte in einem Polyeder.)

Bild:



$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

$P_I := \mathrm{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$

<u>Bsp:</u> $G=(V,E)$ ungerichteter Graph

$\mathbb{R}^V, \mathbb{R}^E$: VR der Funktionen $V \to \mathbb{R}$, $E \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^{V \times E}$: —— " —— $V \times E \to \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ <u>Inzidenzmatrix</u> definiert durch

$$A_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \in e, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann:

$$\begin{aligned}
\nu(G) &= \max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\} \\
&= \max\Big\{\sum_{e \in E} x_e : \; x_e \geq 0 \;\forall e \in E, \\
&\qquad x_e \in \mathbb{Z} \;\forall e \in E, \\
&\qquad \sum_{e: e \ni v} x_e \leq 1 \;\forall v \in V\Big\} \\
&= \max\left\{\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}^T x : x \geq 0, Ax \leq \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}, x \in \mathbb{Z}^E\right\}
\end{aligned}$$

Werden sehen, dass für G <u>bipartit</u>:

$$= \max\left\{\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}^T x : x \geq 0, Ax \leq \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}, x \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}^E\right\}$$

⚠ Im allgemeinen, nicht-bipartiten Fall kann „$<$" gelten:

z.B. $G = \triangle$, $x_e = \frac{1}{2}$ f.a. $e \in E$.

DUALITÄTSBEZIEHUNG:

$$\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \in \mathbb{Z}^n\}$$
$$\le \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \in \mathbb{R}^n\}$$
$$= \min\{y^T b : y \ge 0,\ y^T A = c^T,\ y \in \mathbb{R}^m\}$$
$$\le \min\{y^T b : y \ge 0,\ y^T A = c^T,\ y \in \mathbb{Z}^m\}$$

⌈ANGENOMMEN (PLP) UND (DLP) HABEN ZULÄSSIGE LÖSUNG⌋

Im Allgemeinen gilt „$<$"! (s. Bsp. oben)

Kein Wunder: LP KANN EFFIZIENT GELÖST WERDEN (IN POLYNOMIELLER ZEIT).
ILP DAGEGEN WAHRSCHEINLICH NICHT.
(ÄQUIVALENT ZUM $P \ne NP$-PROBLEM, \$1000000 FÜR LÖSUNG)

FRAGE: In welcher Situation gilt „$=$"?

DEF.: Ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst ganzzahlig, falls jede Ecke z von P ganzzahlig ist, d.h. $z \in \mathbb{Z}^n$.

Falls P ganzzahlig,
dann $\max\{c^T x : x \in P,\ x \in \mathbb{Z}^n\} = \max\{c^T x : x \in P\}$

$\rightarrow$ Bedingungen an A, b, damit $P = \{x : Ax \le b\}$ ganzzahlig?