§2 Vollständig-unimodulare Matrizen

<u>Def:</u> $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt <u>vollständig-unimodular</u> (VU), falls jeder ihrer Minoren (d.h. Determinanten quadratischer Teilmatrizen) gleich $0, -1,$ oder $+1$ ist.

<u>Insbesondere:</u> $A_{ij} \in \{0, -1, +1\}$

<u>Satz:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$. Dann ist jede Ecke des Polyeders $P = \{x : Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

<u>Bew.:</u> Sei z Ecke von P. Dann hat die Teilmatrix A_z (siehe Vorl. 12, Kap. 5.3) vollen Rang n und enthält darum eine $n \times n$ Teilmatrix A' von Rang n. OBdA ist A' in den ersten n Zeilen von A enthalten.
Setze $b' = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$, dann gilt $A'z = b'$.
Nach der Cramerschen Regel ist $z_i = \frac{\det A'_i}{\det A'}$. Da $|\det A'| = 1$ und A'_i ganzzahlig, ist also $z_i \in \mathbb{Z}$. ☒

<u>Bem:</u> Nicht jedes Polyeder hat eine Ecke.

<u>Def:</u> Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>ganzzahlig</u>, falls für alle $c \in \mathbb{R}^n$, für die $\max\{c^T x : x \in P\}$ endlich ist, das Maximum an einem ganzzahligen Vektor angenommen wird.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$. Dann ist $P = \{x : Ax \le b\}$ ein ganzzahliges Polyeder.

Bew: Sei $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben und x^* optimale Lösung von $\max\{c^T x : Ax \le b\}$. Wähle $d', d'' \in \mathbb{Z}^n$ mit $d' \le x^* \le d''$. Dann ist $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b, d' \le x \le d''\}$ ein Polytop. Weiter ist

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ -I \\ I \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} b \\ -d' \\ d'' \end{bmatrix} \right\}$$

und die Matrix $\begin{bmatrix} A \\ -I \\ I \end{bmatrix}$ ist VU. Nach dem vorherigen Satz ist Q also ganzzahliges Polytop und außerdem wird $\max\{c^T x : x \in Q\}$ an einer Ecke $\tilde{x}$ angenommen. Da $x^* \in Q$, ist $c^T\tilde{x} \ge c^T x^*$, und weil $A\tilde{x} \le b$, ist $\tilde{x}$ optimale Lösung von $\max\{c^T x : Ax \le b\}$. ☒

Korollar: $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$. Dann haben die beiden linearen Programme

$$\max\{c^T x : Ax \le b\} = \min\{y^T b : y \ge 0, y^T A = c^T\}$$

ganzzahlige Lösungen, falls die Optima endlich sind.

Bew: Folgt aus dem vorhergehenden Satz, weil die Matrix

$$\begin{bmatrix} -I \\ A^T \\ -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{(2n+m)\times m} \text{ VU ist.}$$

Ziel: Charakterisierung von VU mit Hilfe von Ganzzahligkeit von Polyedern.

Satz (Hoffman, Kruskal 1956) Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt

$$A \text{ ist VU} \iff \forall b \in \mathbb{Z}^m : P = \{x : Ax \le b, x \ge 0\} \text{ ist ganzzahlig.}$$

Bew: „$\Rightarrow$" Weil $P \subseteq \{x : x \ge 0\}$, wird $\max\{c^T x : x \in P\}$ in einer Ecke von P angenommen, falls das Maximum endlich ist. ($\rightarrow$ Aufgabe 9.1)

Sei z eine Ecke von P. Betrachte

$$B = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dann enthält B_z eine reguläre Teilmatrix $B' \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Sei $b' \in \mathbb{Z}^n$ der entsprechende Teilvektor von $\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dann ist $z = (B')^{-1} b'$ ganzzahlig aufgrund der Cramerschen Regel und weil A VU ist.

„$\Leftarrow$" Sei A' reguläre $k \times k$ Teilmatrix von A. Zz: $|\det A'| = 1$.

OBdA ist A' obere linke Teilmatrix von A. Betrachte $B \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ bestehend aus den ersten k und letzten m-k Spalten von $[A \; I_m]$, also

$$[A \; I_m] = \begin{array}{cccc|cl} k & n-k & k & m-k & & \\ \hline A' & & I_k & 0 & & k \\ & & 0 & I_{m-k} & & m-k \end{array}$$

B

Dann ist $|\det B| = |\det A'|$.

<u>Ziel</u>: Zeige $B^{-1} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$. Denn: Weil dann $\det B^{-1} \in \mathbb{Z}$

und $\det B \cdot \det B^{-1} = 1$, muss $|\det B| = 1$ sein.

Sei $i \in \{1, \dots, m\}$. Wir zeigen dass die i-te Spalte von B^{-1} ganzzahlig ist:

Wähle $y \in \mathbb{Z}^m$ mit $y + B^{-1}e_i \geq 0$ und setze $z = y + B^{-1}e_i$.

Dann ist $Bz = By + e_i \in \mathbb{Z}^m$ und setze $b = Bz$.

Füge in z hinter den ersten k Komponenten $n-k+k$ Nullen ein, nenne diesen Vektor z'. Dann gilt nach Konstruktion

$$[A \; I] z' = Bz = b.$$

Da $z' \geq 0$, liegt der Vektor z'', der aus den ersten n Komponenten von z' besteht, in $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$. D.h. es gilt

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} z'' \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die ersten k und die letzten $n-k$ dieser Ungleichungen sind mit Gleichheit erfüllt. Da die entsprechenden Zeilen von $\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$ lin. unabh. sind, ist also z'' eine Ecke von P.

Nach Vor. ist $z'' \in \mathbb{Z}^n$. Auf den ersten n Komponenten stimmen z' und z'' überein. Die letzten m Komponenten von z' sind durch $b - Az''$ gegeben, und also auch ganzzahlig.

Also ist $z \in \mathbb{Z}^m$ und somit auch $B^{-1}e_i = z - y \in \mathbb{Z}^m$.

$\boxtimes$