Wiederholung

Verhältnis zwischen (IP) $\max\limits_{\substack{x \in \mathbb{Z}^n \\ Ax \leq b}} c^T x$ und (LP) $\max\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ Ax \leq b.}} c^T x$?

Allgemein $(IP) < (LP)$, manchmal $(IP) = (LP)$.

<u>Def.</u>: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ VU $\Leftrightarrow$ alle Minoren von $A \in \{-1, 0, +1\}$.

Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ganzzahlig $\Leftrightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R}^n$: $\underbrace{\max\{c^T x : x \in P\}}_{< \infty}$

$\Longrightarrow$ Maximum wird bei $x^* \in \mathbb{Z}^n$ angenommen.

<u>Satz</u>

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$ $\Rightarrow$ jede Ecke von $P := \{x : Ax \leq b\}$ ist $\in \mathbb{Z}^n$;

P ist ganzzahlig

(Hoffman, Kruskal)

A VU $\Leftrightarrow$ $\forall b \in \mathbb{Z}^m$: $P' = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ ist ganzzahlig.

§ 3 Vollständig unimodulare Matrizen und bipartite Graphen

Satz Sei $G = (V, E)$ unger. Graph.

G ist bipartit $\iff$ Inzidenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ ist VU.

Bew.: „$\Rightarrow$": Sei B eine $t \times t$ Teilmatrix von A.

Zeige: $\det B \in \{-1, 0, +1\}$ per Induktion nach t

$t = 1$: ✓

$t > 1$: **1. Fall:** B enthält eine Nullspalte

$\det B = 0$.

2. Fall: B enthält Spalte, die genau eine 1 enthält.

Dann (nach evtl. Permutation von Zeilen u. Spalten)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b^T \\ 0 & B' \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}^{t-1},\ B' \in \mathbb{R}^{(t-1)\times(t-1)}.$$

Nach I.V. $\det B' \in \{-1, 0, +1\}$. Also auch $\det B \in \{-1, 0, +1\}$.

<u>3. Fall</u> Jede Spalte von B enthält genau 2 Einsen.

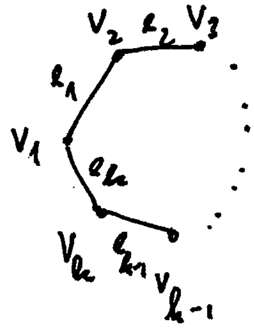
Da G bipartit ist, kann man (nach evtl. Permutation der Zeilen) B als

$$B = \begin{bmatrix} B' \\ B'' \end{bmatrix}$$

schreiben, wobei jede Spalte von B' genau eine 1 enthält und jede Spalte von B'' genau eine 1 enthält. Aufaddieren aller Zeilen von B' gibt den Vektor $(1, \dots, 1)$. Genauso Aufaddieren aller Zeilen von B''. D.h. Zeilen von B sind lin. abh.; $\det B = 0$.

<u>„$\Longleftarrow$"</u>: Sei A VU und ang. der Graph G ist nicht bipartit. Dann enthält G einen Kreis ungerader Länge mit Knoten $v_1, \dots, v_k$ und Kanten $e_1, \dots, e_k$. Die entsprechende Teilmatrix von A (mit Zeilen $v_1, \dots, v_k$ und Spalten $e_1, \dots, e_k$) ist von der Form:

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_k
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_{k-1} & e_k \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



Durch z. B. Entwicklung nach der k-ten Spalte sieht man, dass die Determinante dieser Matrix gleich $(+1)\cdot 1 + (+1)\cdot 1 = 2$ ist (k ist ungerade!). Also kann A nicht VU sein. $\boxtimes$

<u>Korollar</u> (Matching-Theorem von König; siehe Kapitel 3.3)
G bipartit. Dann

$$
\begin{aligned}
\nu(G) &= \max\{\,|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\,\} \\
&= \min\{\,|U| : U \subseteq V \text{ Knotenüberdeckung in } G\,\} \\
&= \tau(G).
\end{aligned}
$$

Bew.:

$$\nu(G) = \max\Big\{ \sum_{e\in E} x_e : x_e \geq 0 \ \forall e\in E,\ x_e \in \mathbb{Z} \\ \sum_{e:\, e\ni v} x_e \leq 1 \ \forall v\in V \Big\}$$

$$= \max\{ \mathbb{1}^T x : x\in\mathbb{Z}^E,\ x\geq 0,\ Ax\leq \mathbb{1}\}$$

Hoffman-Kruskal, A VU

$$= \max\{ \mathbb{1}^T x : x\in\mathbb{R}^E,\ x\geq 0,\ Ax\leq \mathbb{1}\}$$

LP Dualität

$$= \min\{ \mathbb{1}^T y : y\in\mathbb{R}^V,\ y\geq 0,\ y^T A\geq \mathbb{1}\}$$

H. K.

$$= \min\{ \mathbb{1}^T y : y\in\mathbb{Z}^V,\ y\geq 0,\ y^T A\geq \mathbb{1}\}$$

$$= \min\Big\{ \sum_{v\in V} y_v : y_v\in\mathbb{Z},\ y_v\geq 0 \ \forall v\in V \\ y_u + y_v \geq 1 \ \forall \{u,v\}\in E\Big\}$$

$$= \tau(G)$$

$y\in\mathbb{Z}^V$, der Minimum erzielt, hat nur 0/1-Komponenten.

$y_v = 1 \Longleftrightarrow v$ ist Knoten in einer minimalen Knotenüberdeckung.

Korollar G bipartit. Dann

$$\operatorname{conv}\{\chi^M : M \subseteq E \text{ Matching von } G\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0,\ Ax \leq 1\}, \text{ wobei}$$

A Inzidenzmatrix von G.

Bew.: „$\subseteq$": ✓

„$\supseteq$": $Q = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0,\ Ax \leq 1\}$ ist beschränkt, also ist Q Polytop, und somit ist Q die konvexe Hülle seiner Ecken. Da A VU, sind alle Ecken von Q ganzzahlig. Jeder ganzzahlige Vektor in Q ist Inzidenzvektor eines Matchings von G.