Korollar (Theorem von Egerváry (1931))

Sei $G = (V, E)$ bipartit, $w: E \to \mathbb{Z}$ Gewichtsfkt.

Dann ist

$$\nu_w(G) = \max\{w(M) : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}$$

$$= \min \sum_{v \in V} y_v$$

$$y \in \mathbb{Z}^V, \quad y \geq 0$$

$$y_u + y_v \geq w(\{u,v\}) \quad \forall \{u,v\} \in E.$$

Bew.: Weil die Inzidenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ von G VU ist, gilt

$$\max\{w^T x : x \geq 0, \ Ax \leq 1\}$$

$$= \min\{1^T y : y \geq 0, \ y^T A \geq w\},$$

wobei beide Probleme optimale ganzzahlige Lösungen haben.

§ 4 Vollständig unimodulare Matrizen und gerichtete Graphen

<u>Def.</u>: Die <u>Inzidenzmatrix</u> eines gerichteten Graphen $D = (V, A)$ ist $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$ mit

$$M_{v,a} = \begin{cases} +1, & \text{falls } a \in \delta^-(v) \quad \xrightarrow{a} \bullet v \\ -1, & \text{falls } a \in \delta^+(v) \quad v \bullet \xrightarrow[a]{} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Jede Spalte von M enthält genau eine $+1$ und genau eine -1.

<u>Satz</u> M ist VU.

<u>Bew.</u>: Sei $B \in \mathbb{R}^{t \times t}$ eine Teilmatrix von M. Zeige per Induktion nach t, dass $\det B \in \{-1, 0, +1\}$.

<u>$t = 1$:</u> ✓

<u>$t > 1$:</u> <u>1. Fall</u>: B hat Nullspalte

$\Longrightarrow \det B = 0$.

2. Fall: B hat Spalte, die genau ein Element $\neq 0$ enthält.

Dann, nach evtl. Vertauschung von Zeilen und Spalten, ist

$$B = \begin{bmatrix} \pm 1 & b^T \\ 0 & B' \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}^{t-1}, \quad B' \in \mathbb{R}^{(t-1)\times(t-1)}.$$

Nach I.V. $\det B' \in \{-1, 0, +1\}$, also $\det B = (\pm 1) \cdot \det B'$
$= -1, 0, 1$.

3. Fall Jede Spalte von B enthält 2 Elemente $\neq 0$.

Aufaddieren sämtlicher Zeilen von B ergibt 0, d.h. $\det B = 0$.

Korollar (Max-flow-min-cut Theorem)

$D = (V, A)$ gerichteter Graph, $s, t \in V$, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Kapazitätsfkt. Dann

$$\max_{\substack{f \text{ s-t Fluss} \\ 0 \leq f \leq c}} \text{value}(f) = \min_{\substack{U \subseteq V \\ s \in U,\, t \notin U}} c(\delta^+(U)).$$

Bew.: max $\leq$ min: ✓

max $\geq$ min: Sei $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$ die Inzidenzmatrix von D und sei M' die Matrix, die man durch Streichen der zu s und t gehörenden Zeilen aus M bekommt.

$f \in \mathbb{R}^A$ ist s-t Fluss $\iff M'f = 0$.

Sei $w^T \in \mathbb{R}^A$ die zu t gehörende Zeile von M. Dann ist

$$\text{value}(f) = w^T f.$$

Also

$$\max_{\substack{f \text{ s-t Fluss} \\ 0 \leq f \leq c}} \text{value } f = \max \left\{ w^T f : \begin{array}{l} 0 \leq f \leq c \\ M'f = 0 \end{array} \right\}$$

$$\underset{\text{Dualität}}{\overset{\text{LP}}{=}} \min \left\{ y^T c : \begin{array}{l} y \geq 0,\ z \in \mathbb{R}^{V \setminus \{s,t\}} \\ y^T + z^T M' \geq w^T \end{array} \right\}.$$

$$= \min \left\{ y^T c : (y^T \ z^T) \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & M' \end{bmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Matrix $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & M' \end{bmatrix}$ ist VU und der Vektor $\binom{0}{w}$ ist ganzzahlig, also wird das Minimum an ganzzahligen Vektoren y^*, z^* angenommen.

Erweitere z^* zu $z^* \in \mathbb{Z}^V$ durch $z_t^* = -1$ und $z_s^* = 0$.

Dann gilt $(y^*)^T + (z^*)^T M \geq 0$. [Überprüfen!]

Setze $U = \{v \in V : z_v^* \geq 0\}$. Dann $s \in U$, $t \notin U$.

<u>Beh.</u>: $\sum_{a \in \delta^+(U)} c(a) \leq y^{*T} c \quad (= \max \text{value}(f))$.

<u>Bew.</u>: Es genügt z.z.: Falls $a \in \delta^+(U)$, dann $y_a^* \geq 1$.

Da $z^* \in \mathbb{Z}^V$ gilt für $a = (u,v) \in \delta^+(U)$:

$z_u^* \geq 0, \quad z_v^* \leq -1$.

Wegen $[y^{*T} + z^{*T} M]_a \geq 0$: $y_a^* + z_v^* - z_u^* \geq 0$

D.h. $y_a^* \geq z_u^* - z_v^* \geq 1$. $\boxtimes$