

## Korollar (Theorem von Egerváry (1931))

Sei  $G = (V, E)$  bipartit,  $w: E \rightarrow \mathbb{Z}$  Gewichtsfnkt.

Dann ist

$$\nu_w(G) = \max \{ w(M) : M \subseteq E \text{ Matching in } G \}$$

$$= \min \sum_{v \in V} y_v$$

$$y \in \mathbb{Z}^V, y \geq 0$$

$$y_u + y_v \geq w(\{u, v\}) \quad \forall \{u, v\} \in E.$$

Bew.: Weil die Incidenzmatrix  $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$  von  $G$   $VU$  ist, gilt

$$\max \{ w^T x : x \geq 0, Ax \leq 1 \}$$

$$= \min \{ 1^T y : y \geq 0, y^T A \geq w \},$$

wobei beide Probleme optimale ganzzahlige Lösungen haben.

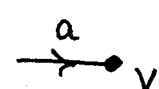
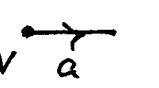
## §4 Vollständig unimodulare Matrizen

### und gerichtete Graphen

Def.: Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen

$D = (V, A)$  ist  $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$  mit

$$M_{v,a} = \begin{cases} +1, & \text{falls } a \in \mathcal{S}^-(v) \\ -1, & \text{falls } a \in \mathcal{S}^+(v) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Jede Spalte von  $M$  enthält genau eine  $+1$  und genau eine  $-1$ .

Satz  $M$  ist VU.

Bew.: Sei  $B \in \mathbb{R}^{t \times t}$  eine Teilmatrix von  $M$ . Zeige per Induktion nach  $t$ , dass  $\det B \in \{-1, 0, +1\}$ .

$t=1$ : ✓

$t > 1$ : 1. Fall:  $B$  hat Nullspalte  
 $\Rightarrow \det B = 0$ .

2. Fall:  $B$  hat Spalte, die genau ein Element  $\neq 0$  enthält.

Dann, nach evtl. Vertauschung von Zeilen und Spalten, ist

$$B = \begin{bmatrix} \pm 1 & b^T \\ 0 & B' \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}^{t-1}, \quad B' \in \mathbb{R}^{(t-1) \times (t-1)}.$$

Nach 1. v.  $\det B' \in \{-1, 0, +1\}$ , also  $\det B = (\pm 1) \cdot \det B' = -1, 0, 1$ .

3. Fall Jede Spalte von  $B$  enthält 2 Elemente  $\neq 0$ .

Aufaddieren sämtlicher Zeilen von  $B$  ergibt 0, d.h.  $\det B = 0$ .

Korollar (Max-flow-min-cut Theorem)

$D = (V, A)$  gerichteter Graph,  $s, t \in V$ ,  $c: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  Kapazitätsfkt. Dann

$$\begin{array}{l} \max \text{ value } (f) \\ f \text{ s-t Fluss} \\ 0 \leq f \leq c \end{array} = \min_{\substack{U \subseteq V \\ s \in U, t \notin U}} c(\delta^+(U))$$

Bew.: max  $\leq$  min:  $\checkmark$

max  $\geq$  min: Sei  $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$  die Incidenzmatrix von  $D$

und sei  $M'$  die Matrix, die man durch Streichen der zu  $s$  und  $t$  gehörenden Zeilen aus  $M$  bekommt.

$f \in \mathbb{R}^A$  ist  $s$ - $t$  Fluss  $\Leftrightarrow M'f = 0$ .

Sei  $w^T \in \mathbb{R}^A$  die zu  $t$  gehörende Zeile von  $M$ . Dann ist

$$\text{value}(f) = w^T f.$$

Also

$$\begin{aligned} \max \text{ value } f &= \max \{ w^T f : 0 \leq f \leq c \\ f \text{ s-t Fluss} & \quad M'f = 0 \} \\ 0 \leq f \leq c & \end{aligned}$$

LP  
= Dualität

$$\min \left\{ y^T c : y \geq 0, z \in \mathbb{R}^{V \setminus \{s,t\}}, \right. \\ \left. y^T + z^T M' \geq w^T \right\}.$$

$$= \min \left\{ y^T c : (y^T \ z^T) \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & M' \end{bmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Matrix  $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & M \end{bmatrix}$  ist VU und der Vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$

ist ganzzahlig, also wird das Minimum an ganzzahligen

Vektoren  $y^*, z^*$  angenommen.

Erweitere  $z^*$  zu  $z^* \in \mathbb{Z}^V$  durch  $z_t^* = -1$  und  $z_s^* = 0$ .

Dann gilt  $(y^*)^T + (z^*)^T M \geq 0$ . [Überprüfen!]

Setze  $U = \{v \in V : z_v^* \geq 0\}$ . Dann  $s \in U, t \notin U$ .

Beh.:  $\sum_{a \in \mathcal{S}^+(U)} c(a) \leq y^{*T} c$  (= max value (f)).

Bew.: Es genügt z.z.: Falls  $a \in \mathcal{S}^+(U)$ , dann  $y_a^* \geq 1$ .

Da  $z^* \in \mathbb{Z}^V$  gilt für  $a = (u, v) \in \mathcal{S}^+(U)$ :

$$z_u^* \geq 0, \quad z_v^* \leq -1.$$

Wegen  $\left[ y^{*T} + z^{*T} M \right]_a \geq 0$ :  $y_a^* + z_v^* - z_u^* \geq 0$

D.h.  $y_a^* \geq z_u^* - z_v^* \geq 1$ . □