Kapitel 7 Das Eliminationsverfahren von Fourier und Motzkin

Algorithmisches Grundproblem in der Polyedertheorie:

Entscheide, ob Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ nicht leer ist.

Lineare Algebra: Entscheide, ob $L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \neq \emptyset$.

$\longrightarrow$ Eliminationsverfahren von Gauß.

§ 1 Fourier-Motzkin Elimination

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Finde $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ bzw. entscheide (mit mathematischer Sicherheit), dass es ein solches x nicht gibt.

Idee: Eliminiere Variable x_1; finde $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times (n-1)}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, so dass $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \iff \exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1} : \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}$.

Dazu: Multipliziere Zeilen von A und entsprechende Einträge von b mit positiven Konstanten. Dann hat das System $Ax \leq b$ nach Umnummerierung der Zeilen folgende Gestalt:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1'^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_r'^T \\ -1 & a_{r+1}'^T \\ \vdots & \vdots \\ -1 & a_{r+s}'^T \\ 0 & a'_{r+s+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a'_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (*),$$

wobei $a_i'^T \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$ die i-te Zeile von A ist, in der das erste Element gelöscht wurde. [Es kann passieren, dass $r = 0$ oder $s = 0$ ist].

Betrachte die ersten r Bedingungen:

$$x_1 + a_i'^T \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} \leq b_i \implies x_1 \leq b_i - a_i'^T \tilde{x}, \quad i = 1, \dots, r$$

Genauso die nächsten s Bedingungen

$$-x_1 + a'^T_{r+j}\tilde{x} \le b_{r+j} \implies x_1 \ge a'^T_{r+j}\tilde{x} - b_{r+j}.$$

Zusammen

$$\max_{j=1,\dots,s} a'^T_{r+j}\tilde{x} - b_{r+j} \le x_1 \le \min_{i=1,\dots,r} b_i - a'^T_i\tilde{x} \qquad (**)$$

[Falls $s=0$, dann $\max = -\infty$; falls $r=0$, dann $\min = +\infty$].

Also kann man x_1 eliminieren und das System $(*)$ ist äquivalent zu

$$a'^T_{r+j}\tilde{x} - b_{r+j} \le b_i - a'^T_i\tilde{x} \qquad i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,s$$

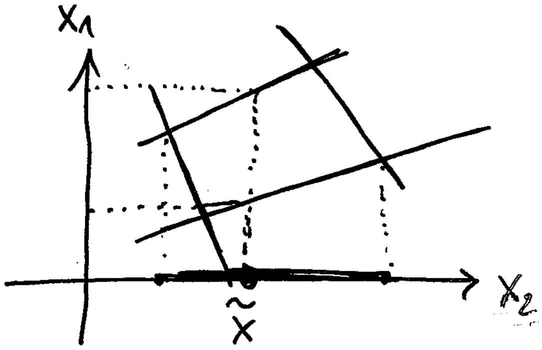
$$a'^T_i\tilde{x} \le b_i \qquad i = r+s+1,\dots,m$$

bzw. zu

$$\left.\begin{array}{ll} \left(a'^T_{r+j} + a^T_i\right)\tilde{x} \le b_i + b_{r+j}, & i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,s \\ a'^T_i\tilde{x} \le b_i, & i=r+s+1,\dots,m \end{array}\right\} \quad (***)$$

Das neue System hat $r\cdot s + m-(r+s)$ Ungleichungen und $n-1$ Variablen.

Bem.: a) $(***)$ entspricht einer Projektion des Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ entlang der x_1-Achse



b) Lösung $\tilde{x}$ kann zu einer Lösung $(x_1, \tilde{x})$ von $(*)$ erweitert werden. Dann muss x_1 die Ungleichungen $(**)$ erfüllen.

c) Eliminiere nun sukzessive $x_2, x_3, \dots$ bis man bei x_n angekommen ist.

d) Für x_n ist es offensichtlich, ob das finale System eine Lösung besitzt. Das finale System hat eine Lösung $\Longleftrightarrow$ Ursprungssystem $(*)$ hat eine Lösung.

§2 Lösen von LPs mit Fourier-Motzkin

$$(LP) \qquad \max\ c^T x \quad x \in \mathbb{R}^n \quad Ax \le b$$

Führe zusätzliche Variable λ ein und betrachte das System

$$Ax \le b, \quad \lambda \le c^T x \iff \lambda - c^T x \le 0.$$

Lösen von (LP) $\iff$ Finde Lösung (x, λ) von diesem System, so dass λ so groß wie möglich ist. Eliminiere $x_1, \dots, x_n$ bis λ die letzte Variable ist. Wähle diese dann so groß, wie möglich.

§ 3 Farkas Lemma mit Fourier-Motzkin

Lemma (Farkas)

$Ax \le b$ hat keine Lösung $\iff \exists y \ge 0 : y^T A = 0, y^T b < 0$

Bew.: „$\Leftarrow$" (hatten wir schon)

$$0 = y^T A x \le y^T b < 0 \quad ↯$$

„$\Longrightarrow$": (algorithmisch mit Fourier-Motzkin)

Beh.: $(\underbrace{0, \dots, 0}_{y^T A}, \underbrace{-1}_{y^T b}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine nichtnegative Linear-kombination von Zeilen der Matrix $[A \mid b]$ gegeben durch y.

Bew.: (per Induktion nach n)

$n=1$: Ang. $A x_1 \le b_1$ hat keine Lösung.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x_1 \le \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_{r+s} \\ b_{r+s+1} \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

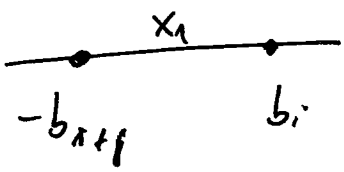
1. Fall: $0 \cdot x_1 \le b_{r+s+k}$ und $b_{r+s+k} < 0$.

Wähle $y = \left[0, \dots, 0, -\frac{1}{b_{r+s+k}}, 0, \dots, 0\right]^T$,

Position $r+s+k$.

2. Fall: $b_i < -b_{r+j}$

Dann
$$x_1 \le b_i$$
$$-x_1 \le b_{r+j}$$



, aber $b_i < -b_{r+j}$.

Wähle $y = \left[0, \dots, 0, -\frac{1}{b_i + b_{r+j}}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{b_i + b_{r+j}}, 0, \dots, 0\right]^T$

Pos. i Pos. $r+j$

$m > 1$: Betrachte das System $A'x' \leq b'$, in dem die Variable x_1 eliminiert wurde. Das System besitzt keine Lösung, also ist der Vektor $(0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^n$ eine nichtnegative Linearkombination der Zeilen von $[A' \mid b']$. Nach Konstruktion sind die Zeilen der Matrix $[0\ A' \mid b']$ nichtnegative Linearkombinationen der Zeilen von $[A \mid b]$. Also ist der Vektor $(0, 0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine nichtneg. Komb. der Zeilen von $[A \mid b]$. $\boxtimes$