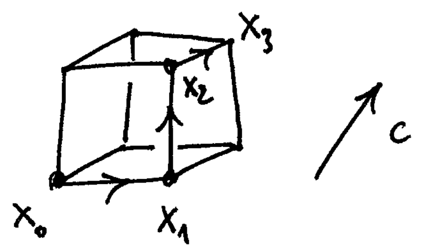
Kapitel 8 Das Simplexverfahren

Ziel: Löse (LP) $\quad p^* = \max\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ Ax \le b}} c^T x$

Wissen: Ang. $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ ist Polytop. Dann wird das Maximum an einer Ecke von P angenommen
($\rightarrow$ Kapitel 5.5)

Geometrische Idee: Finde Sequenz von Ecken $x_0, x_1, \ldots, x_N \in P$,
so dass $\quad c^T x_0 \le c^T x_1 \le \ldots \le c^T x_N = p^*$.



Zunächst: spezielle Annahme: Ang. Polyeder P besitzt eine Ecke x_0, die wir kennen.

Später: Beseitigung dieser speziellen Annahme.

Simplexalgorithmus

- Wähle Teilsystem $A_0 x \le b_0$ von $Ax \le b$ mit $A_0 x_0 = b_0$ und rang $A_0 = n$.
- Bestimme $u \in \mathbb{R}^m$ mit $c^T = u^T A$ und $u_i = 0$, falls Zeile i von A nicht zu A_0 gehört.

Dann berechne $c^T A_0^{-1}$ und füge Nullen an den entsprechenden Stellen hinzu

1. Fall $u \ge 0$

Dann ist x_0 optimal, weil u eine optimale duale Lösung ist:

$$c^T x_0 = u^T A x_0 = u^T b \ge \min \{ y^T b : y \ge 0,\ y^T A = c^T \}$$
$$= \max \{ c^T x : Ax \le b \}.$$

2. Fall $u \not\ge 0$.

Sei i der kleinste Index mit $u_i < 0$.

Wähle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $a^T y = 0$ $\forall$ Zeilen a^T von A_0 mit $a^T \ne a_i^T$

und $a_i^T y = -1$.

[y ist die entsprechende Spalte von $-A_0^{-1}$].

2a) $a^T y \leq 0 \quad \forall$ Zeilen a^T von A

Dann ist $x_0 + \lambda y \in P \quad \forall \lambda \geq 0$.

Desweiteren

$$c^T(x_0 + \lambda y) = c^T x_0 + \lambda c^T y = c^T x_0 + \lambda \overbrace{u^T A y}^{= -u_i}$$

$$= c^T x_0 - \lambda u_i \xrightarrow[\text{für } \lambda \to \infty]{} +\infty .$$

D. h. das LP ist unbeschränkt.

2b) $a^T y > 0$ für eine Zeile a^T von A.

Setze

$$\lambda_0 = \max \{ \lambda : x + \lambda y \in P \}$$

$$= \min \left\{ \frac{b_j - a_j^T x_0}{a_j^T y} : j = 1, \dots, m, \ a_j^T y > 0 \right\}.$$

Sei j der kleinste Index, an dem das Minimum angenommen wird.

Definiere A_1 = Matrix, die man aus A_0 erhält, wenn man Zeile a_i^T durch Zeile a_j^T austauscht.

$$x_1 = x_0 + \lambda y.$$

Dann $A_1 x_1 = b_1$

- Gehe zum Anfang mit A_1, x_1 anstatt von A_0, x_0.
- Wiederhole bis $u \geq 0$ oder bis klar ist, dass LP unbeschränkt ist.

<u>Satz</u> Der Simplexalgorithmus terminiert nach endlich vielen Schritten.

<u>Bew.:</u> Bezeichne die Variablen im k-ten Schritt mit

$$A_k, x_k, u_k, y_k, \lambda_{0,k}$$

Es gilt $c^T x_0 \leq c^T x_1 \leq \dots$, und $c^T x_k = c^T x_{k+1}$ gdw. $x_k = x_{k+1}$, weil

$$c^T x_{k+1} = c^T (x_k + \lambda_{0,k} y_k) \quad \text{mit } \lambda_{0,k} \geq 0$$

und

$$c^T y_k = (-u_k)_i > 0.$$

Angenommen der Algorithmus landet in einer Endlosschleife. Dann $\exists k, l$, $k < l$ mit $A_k = A_l$, weil es nur endlich viele verschiedene Teilmatrizen von A gibt. Dann $c^T x_k = c^T x_l$, also $x_k = x_{k+1} = \dots = x_l$.