KAPITEL 3 — MATCHINGS IN BIPARTITEN GRAPHEN

F. VALLENTIN, A. GUNDERT

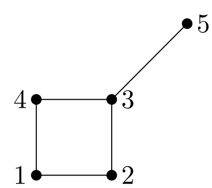
1. Definitionen

Notation 1.1. *Ähnlich wie im vorangegangenen Kapitel zunächst etwas Notation. Wir beschäftigen uns jetzt mit* ungerichteten *Graphen, das sind Graphen, in denen Kanten keine Orientierung besitzen. Die meisten Begriffe definiert man sehr ähnlich wie im gerichteten Fall.*

Wir nennen $G = (V, E)$ *einen* ungerichteten Graph*, wobei*

V *eine endliche Menge von* Knoten *und*

$E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ *eine Menge* ungerichteter Kanten *ist.*



$$V = \{1, \ldots, 5\}$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{3, 5\}\}$$

Die Begriffe Kantenfolge, Weg, Kreis *definieren wir genau wie bei gerichteten Graphen.*

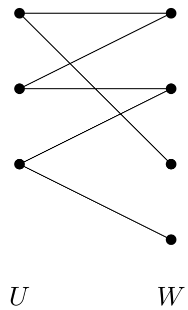
Sei $v \in V$ *ein Knoten, dann heißt* $w \in V$ Nachbar *von* v*, falls* $\{v, w\} \in E$.

Zwei Knoten $u, v \in V$ *heißen* wegzusammenhängend*, falls es einen* u*-*v*-Weg gibt. Die Relation „wegzusammenhängend" ist eine Äquivalenzrelation, ihre Äquivalenzklassen heißen* Zusammenhangskomponenten*. Falls* G *nur eine Zusammenhangskomponente besitzt, so heißt* G zusammenhängend*.*

Der Graph $G = (V, E)$ *heißt* bipartit*, falls zwei Teilmengen* $U, W \subseteq V$ *existieren, so dass*

$$V = U \,\dot{\cup}\, W \quad (\textit{das heißt } V = U \cup W \textit{ und } U \cap W = \emptyset) \textit{ und}$$
$$\forall e \in E: \quad |e \cap U| = |e \cap W| = 1.$$

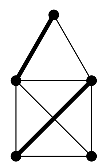
Date: 12. Mai 2014.



2. Matchings mit maximaler Kardinalität

Definition 2.1. *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein* Matching $M \subseteq E$ *ist eine Teilmenge disjunkter Kanten, das heißt*

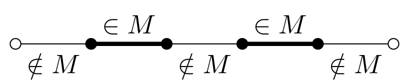
$$\forall e, f \in M: \quad e \cap f = \emptyset.$$



Im folgenden fasse wir einen Weg $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_m, v_m)$ als Teilmenge $P = \{e_1, \ldots, e_m\} \subseteq E$ auf.

Definition 2.2. *Sei $M \subseteq E$ ein Matching. Ein Weg $P \subseteq E$ heißt* M-augmentierend, *falls*

(1) *seine Endknoten nicht von M überdeckt sind und*
(2) *seine Kanten alternierend aus M und nicht aus M sind.*



<u>Klar</u>: Falls P ein M-augmentierender Weg ist, dann ist

$$M' = M \Delta P = (M \backslash P) \cup (P \backslash M) \quad \text{(symmetrische Differenz)}$$

ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$.

Satz 2.3. *Sei M ein Matching in G. Entweder ist M ein Matching mit maximaler Kardinalität, oder es gibt einen M-augmentierenden Weg.*

Beweis. (1) Falls M maximale Kardinalität hat, folgt sofort, dass es keinen M-augmentierenden Weg geben kann (siehe oben).

(2) Sei M' ein Matching mit $|M'| > |M|$. Betrachte die Zusammenhangskomponenten von $G' = (V, M \cup M')$. Da jeder Knoten von G' höchstens zwei Nachbarn hat, bestehen die Zusammenhangskomponenten von G' nur aus Wegen (eventuell der Länge 0) oder aus Kreisen (siehe Aufgabe 3.2). Da $|M'| > |M|$, muss es eine Zusammenhangskomponente von G' geben, die mehr Kanten aus M' als aus M enthält. Diese Zusammenhangskomponente ist ein M-augmentierender Weg.

$\square$

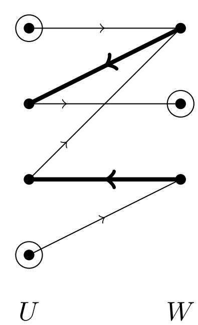
Algorithmus 2.4. *zur Bestimmung eines Matchings maximaler Kardinalität*

$M = \emptyset$
while $\exists M$*-augmentierender Weg* P **do**
| $M = M \Delta P$.
end

Wie findet man M-augmentierende Wege?
$\to$ einfacher Algorithmus für bipartite Graphen ($\to$ hier)
$\to$ Edmonds „Blüten"-Algorithmus für allgemeine Graphen ($\to$ Spezialvorlesung).

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Partition $V = U \dot\cup W$ und sei $M \subseteq E$ ein Matching. Definiere den gerichteten *Residualgraph* $D_M = (V, A_M)$ mit

$$A_M = \{(u,w) \in U \times W : e = \{u,w\} \in E \setminus M\} \cup \{(w,u) \in W \times U : e = \{u,w\} \in E \cap M\}$$

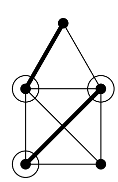


Seien $U_M \subseteq U$, $W_M \subseteq W$ die Knoten, die nicht von M überdeckt werden. Dann entspricht jeder gerichtete Weg von einem Knoten in U_M zu einem Knoten in W_M einem M-augmentierenden Weg und umgekehrt.

Algorithmische Umsetzung:
Finde kürzeste Wege zwischen je zwei Knoten in U_M und W_M mit Bellman-Ford, wobei $l \colon A_M \to \mathbb{Z}$, $l(a) = 1$ gesetzt wird (dies ist eine einfache, aber suboptimale Strategie; besser: verwende zum Beispiel Tiefensuche).

3. Königs Matching Theorem

Definition 3.1. *Sei* $G = (V, E)$ *ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge* $C \subseteq V$ *heißt* Knotenüberdeckung, *falls* $\forall e \in E : |C \cap e| \geq 1$.



Satz 3.2. *(Königs Matching Theorem, 1931)*
Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann gilt

$$\begin{aligned}\nu(G) &= \max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}\\ &= \min\{|C| : C \subseteq V \text{ Knotenüberdeckung von } G\}\\ &= \tau(G).\end{aligned}$$

Beweis. $\underline{\max \leq \min}$: Sei M ein Matching und C eine Knotenüberdeckung. Dann gilt $|M| \leq |C|$, weil je mindestens einer der Endknoten der Kanten in M zu C gehören muss.

$\underline{\max \geq \min}$: Sei $M \subseteq E$ ein Matching in G mit maximaler Kardinalität,

$$M = \{\{u_1, w_1\}, \dots, \{u_m, w_m\}\}, \quad u_i \in U, w_i \in W.$$

Betrachte den Residualgraph D_M und definiere $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ durch

$$v_i = \begin{cases} w_i, & \text{falls es in } D_M \text{ einen gerichteten Weg von } U_M \text{ nach } w_i \text{ gibt.}\\ u_i, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Wir zeigen nun: C ist eine Knotenüberdeckung mit $|C| = m$ (wobei Letzteres klar ist). Sei dafür $\{a, b\} \in E$ eine beliebige Kante. Zu zeigen ist: $a \in C$ oder $b \in C$.

Sei o.B.d.A. $a \in U, b \in W$.

<u>Fall 1</u>: $a \in U_M, b \in W_M$.
Dann wäre $\{a, b\}$ ein M-augmentierender Weg, aber das ist unmöglich, weil M ein maximales Matching ist.

<u>Fall 2</u>: $a \in U_M, b \notin W_M$.
Dann ist $(a, b) \in A_M \Rightarrow b \in C$ (jeweils nach Definition von A_M bzw. C).

<u>Fall 3</u>: $a \notin U_M, b \in W_M$.
Angenommen $a \notin C$. Weil $a \notin U_M$, gibt es ein $w_i \in C$ mit $(w_i, a) \in A_M$. Somit gibt es einen gerichteten Weg in D_M von U_M nach w_i. Dieser kann um die Kanten $(w_i, a), (a, b)$ verlängert werden, was einem M-augmentierenden Weg entspricht. Widerspruch zur Maximalität von M. Das heißt $a \in C$.

<u>Fall 4</u>: $a \notin U_M, b \notin W_M$.
Falls $a \in C$, ist nichts zu zeigen. Sei nun $a \notin C$. Dann gibt es ein w_i mit $\{a, w_i\} \in M$ und $w_i \in C$. Falls $w_i = b$, also $b \in C$, sind wir fertig. Falls $w_i \neq b$, dann gibt es einen gerichteten Weg von U_M nach w_i und dieser kann um die Kanten $(w_i, a), (a, b)$ erweitert werden, das heißt $b \in C$. □

4. Matchings mit maximalem Gewicht

Im folgenden beschäftigen wir uns mit Graphen, die gewichtete Kanten besitzen, das heißt jeder Kante wird ein Gewicht (eine Zahl) zugeordnet. Ziel wird es wieder sein, ein maximales Matching zu bestimmen. Aber diesmal wollen wir nicht, wie vorher, die Anzahl der Kanten, sondern das Gesamtgewicht maximieren. Nochmal zur Übersicht:

gegeben: $G = (V, E)$ ungerichteter Graph, $w\colon E \to \mathbb{R}$ Gewichtsfunktion.
Für $M \subseteq E$ definiere $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$.

gesucht: $\nu_w(G) = \max\{w(M) : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}$.

Definition 4.1. *Ein Matching $M \subseteq E$ heißt* extrem*, falls für alle Matchings $M' \subseteq E$ mit $|M'| = |M|$ gilt, dass $w(M') \leq w(M)$.*

Definition 4.2. *Sei $M \subseteq E$ ein Matching in G. Definiere die Längenfunktion $l_M\colon E \to \mathbb{R}$ durch*

$$l_M(e) = \begin{cases} w(e), & \text{falls } e \in M \\ -w(e), & \text{falls } e \notin M. \end{cases}$$

Für $P \subseteq E$ definiere $l_M(P) = \sum_{e \in P} l_M(e)$.

Satz 4.3. *Sei $M \subseteq E$ ein extremes Matching und $P \subseteq E$ ein M-augmentierender Weg minimaler Länge. Dann ist auch $M' = M \Delta P$ ein extremes Matching.*

Beweis. Sei N ein extremes Matching mit $|N| = |M| + 1$. Da $|N| > |M|$ ist, enthält der Graph $(V, M \cup N)$ eine Zusammenhangskomponente Q, die ein M-augmentierender Weg ist. Dann gilt $l_M(Q) \geq l_M(P)$. Es ist $N \Delta Q$ ein Matching mit $|N \Delta Q| = |M|$. Also $w(N \Delta Q) \leq w(M)$ und zusammen

$$w(N) = w(N \Delta Q) - l_M(Q) \leq w(M) - l_M(P) = w(M'),$$

das heißt M' ist extrem. (Man beachte, dass die Gleichheiten gelten, weil die Längenfunktion l_M den Kanten, die nicht in M liegen, den negativen Wert von w zuordnet.) □

Algorithmus 4.4. *Bestimmung eines Matchings mit maximalem Gewicht („ungarische Methode“, Egerváry 1931)*

```
M_0 = ∅ ; k = 1;
while ∃M_{k−1}-augmentierender Weg do
    Wähle M_{k−1}-augmentierenden Weg P mit minimaler Länge
    M_k = M_{k−1} Δ P
    k = k + 1
end
output: max{w(M_i) : i = 0, 1, ..., k − 1}.
```

Finde M_{k-1}-augmentierenden Weg mit minimaler Länge:
Betrachte wieder den Residualgraph D_M $(M = M_{k-1})$

$$D_M = (V, A_M), A_M = \{(u, w) \in U \times W : \{u, w\} \in E \backslash M\} \cup \{(w, u) \in W \times U : \{u, w\} \in E \cap M\}$$

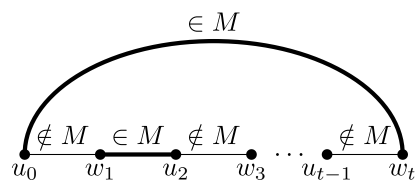
mit Längenfunktion $l_M\colon A_M \to \mathbb{R}$

$$l_M((a, b)) = l_M(\{a, b\}).$$

Finde einen kürzesten Weg von U_M nach W_M. Dies kann man mit Bellman-Ford machen, weil D_M keine gerichteten Kreise negativer Länge besitzt, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 4.5. *Sei $M \subseteq E$ ein extremes Matching. Dann besitzt D_M keine gerichteten Kreise negativer Länge.*

Beweis. Angenommen $C \subseteq E$ entspricht einem gerichteten Kreis in D_M mit $l_M(C) < 0$. Dann haben wir die folgende Situation:



Dann ist $M' = M \Delta C$ ein Matching mit $|M'| = |M|$ und es gilt:

$$w(M') = w(M) - l_M(C) > w(M),$$

das heißt M ist nicht extrem. Widerspruch! $\square$

Prof. Dr. F. Vallentin, Dr. A. Gundert, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90, 50931 Köln, Deutschland
E-mail address: `frank.vallentin@uni-koeln.de, anna.gundert@uni-koeln.de`