KAPITEL 9 — DIE ELLIPSOIDMETHODE

F. VALLENTIN, A. GUNDERT

1. Grundlagen zu Ellipsoiden

Definition 1.1. *Eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definieren das* Ellipsoid

$$\mathcal{E}(A, x) = \{y \in \mathbb{R}^n : (y - x)^T A^{-1}(y - x) \leq 1\}.$$

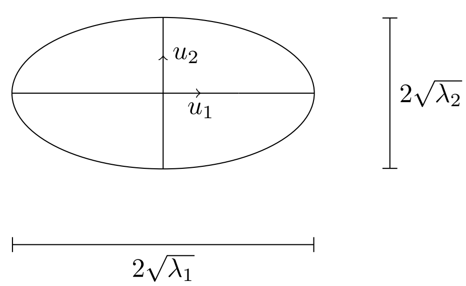
Beispiel 1.2. *$\mathcal{E}(r^2 I_n, 0) = rB_n$, wobei $B_n = \{y \in \mathbb{R} : \|y\| \leq 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel ist.*

Eigenschaften:

- Hauptachsentransformation/Spektralzerlegung:
  Eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

  $$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T,$$

  wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ die Eigenwerte von A sind, und $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis bilden, bestehend aus den zugehörigen Eigenvektoren. Diese Darstellung von A heißt *Spektralzerlegung*. Die Matrix A definiert ein Ellipsoid wie folgt: Die u_i bestimmen die Richtungen der Hauptachsen und die Länge der jeweiligen Hauptachse ist durch $2\sqrt{\lambda_i}$ gegeben.



- Volumen von $\mathcal{E}(A, x)$:

  $$\text{vol}\ \mathcal{E}(A, x) = \sqrt{\det A} \cdot \text{vol}\ B_n,$$

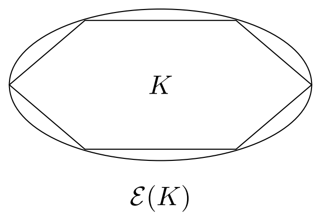
  wobei vol $B_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, mit der Gammafunktion Γ, die für unsere Zwecke ausreichend definiert ist durch

  $$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x).$$

  Der Beweis der Volumenformel ist die Lösung von Aufgabe 12.3.

Date: 16. Juli 2014.

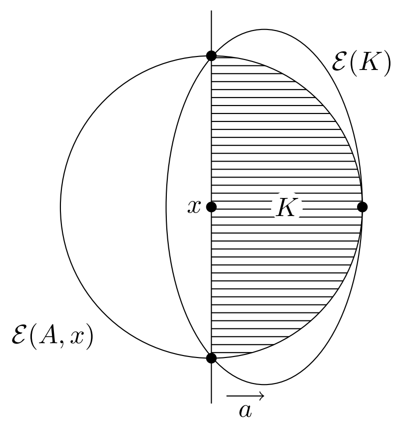
Satz 1.3. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe und kompakte Menge. Dann existiert ein eindeutiges Ellipsoid $\mathcal{E}(K)$ mit $K \subseteq \mathcal{E}(K)$ und mit minimalem Volumen (die beste äußere Approximation von K). Dieses Ellipsoid $\mathcal{E}(K)$ heißt das* Loewner-John-Ellipsoid *von K.*



Beweis. $\rightarrow$ Vorlesung „Konvexe Optimierung“im Wintersemester 2015/16. □

Hier: Spezialfall

$$K = \mathcal{E}(A, x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x\} \text{ mit } a \neq 0.$$



Lemma 1.4. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, $x, a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$. Dann*

$$\mathcal{E}(\mathcal{E}(A, x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x\}) = \mathcal{E}(A', x')$$

mit

$$A' = \frac{n^2}{n^2 - 1}(A - \frac{2}{n+1} bb^T), \quad x' = x + \frac{1}{n} b, \quad b = \frac{1}{\sqrt{a^T A a}} Aa.$$

Desweiteren gilt

$$\frac{\text{vol } \mathcal{E}(A', x')}{\text{vol } \mathcal{E}(A, x)} < e^{-\frac{1}{2(n+1)}} < 1.$$

Beweis. Anleitung:

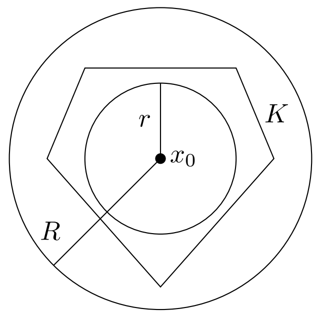
- $\mathcal{E}(A, x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x\} \subseteq \mathcal{E}(A', x')$ folgt aus Aufgabe 12.4.
- Dass $\mathcal{E}(A', x')$ tatsächlich das Loewner-John-Ellipsoid ist, erhält man durch elementares Nachrechnen (etwas fummelig).
- Die Aussage über den Quotient der Volumina erhält man ebenfalls durch elementares Nachrechnen (etwas leichter).

□

2. Trennen und Optimieren

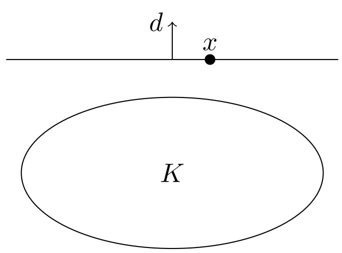
Voraussetzung: Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von konvexen und kompakten Mengen. Angenommen für jedes $K \in \mathcal{K}$ kennen wir $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ r, R > 0$ mit

$$x_0 + rB_n \subseteq K \subseteq x_0 + RB_n.$$



Trennungsproblem:

Eingabe: $x \in \mathbb{R}^n,\ K \in \mathcal{K}$.
Ausgabe: „$x \in K$“ oder $d \in \mathbb{R}^n$ mit $d^T x > \max_{y \in K} d^T y$.



Die Hyperebene

$$\{y \in \mathbb{R}^n : d^T y = d^T x\}$$

trennt x und K.

Falls $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein (beschränktes) Polyeder ist, dann kann man das Trennungsproblem wie folgt lösen: Überprüfe für gegebenes x alle linearen Ungleichungen

$$a_i^T x \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m.$$

Dann ist $x \in K$ genau dann, wenn alle Ungleichungen erfüllt sind. Falls $a_i^T x > b_i$, wähle $d = a_i$.

Optimierungsproblem

Eingabe: $c \in \mathbb{R}^n,\ \|c\| = 1,\ \varepsilon > 0,\ K \in \mathcal{K}$.
Ausgabe: $x \in K$ mit $c^T x \geq \max_{y \in K} c^T y - \varepsilon$.

Theorem 2.1. *(Grötschel, Lovász, Schrijver, 1981; basierend auf Ellipsoidmethode) Für eine Klasse $\mathcal{K}$ lässt sich das Optimierungsproblem durch N-faches Lösen des Trennungsproblems lösen, wobei N so gewählt ist, dass*

$$2\frac{R^2}{r} e^{-\frac{N}{2(n+1)n}} \leq \varepsilon$$

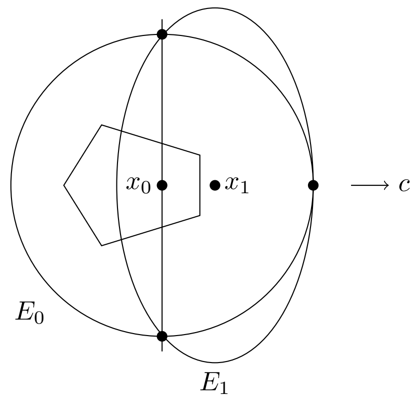
gilt.

Beweis. Der Beweis folgt aus Lemma 3.2 später in diesem Kapitel. $\square$

$E_0 = \mathcal{E}(R^2 I_n, x_0)$
for $k = 0$ ***to*** $N-1$ **do**
  Löse Trennungsproblem für x_k, den Mittelpunkt von E_k
  if $x_k \in K$ **then**
    $a = c$
  end
  else
    $a = -d$
  end
  $E_{k+1} = \mathcal{E}(E_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x_k\})$.
end

Algorithmus 1 : Ellipsoidmethode

3. Ellipsoidmethode



Lemma 3.1. *Seien*

$$\xi_k = \max\{c^T x_j : 0 \leq j \leq k,\ x_j \in K\}$$

und

$$K_k = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \geq \xi_k\}.$$

Dann gilt $K_k \subseteq E_k$.

Beweis. $\rightarrow$ Aufgabe 13.1. □

Lemma 3.2. *Sei* $k \in \mathbb{N}$ *und sei* j *ein Index mit* $0 \leq j < k$ *und* $\xi_k = c^T x_j$. *Dann gilt*

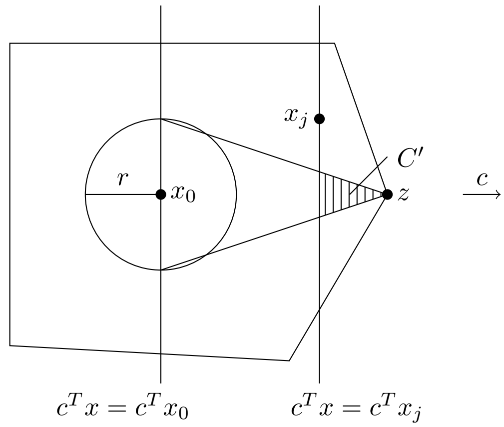
$$c^T x_j \geq \max_{y \in K} c^T y - 2\frac{R^2}{r} e^{-\frac{k}{2(n+1)n}}.$$

Beweis. Sei $z \in K$ eine optimale Lösung, also $c^T z = \max_{y \in K} c^T y$. Betrachte den runden Kegelstumpf C mit Spitze z und Basis

$$x_0 + rB_n \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T x = c^T x_0\}.$$

Sei

$$C' = C \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \geq c^T x_j\}.$$



Das Volumen von C' ist

$$\text{vol } C' = \frac{r^{n-1} \cdot \text{vol } B_{n-1}}{n} (c^T z - c^T x_0) \left(\frac{c^T z - c^T x_j}{c^T z - c^T x_0} \right)^n$$

Nach dem vorhergehenden Lemma ist $C' \subseteq K_k \subseteq E_k$. Also

$$\begin{aligned} \text{vol } C' &\leq \text{ vol } E_k \\ &\leq \text{ vol } E_0 \cdot \left(e^{-\frac{1}{2n+1}} \right)^k \\ &< R^n \text{ vol } B_n \cdot e^{-\frac{k}{2n+1}}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz ergibt:

$$|c^T z - c^T x_0| \leq \underbrace{\|c\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|z - x_0\|}_{\leq R} \leq R.$$

Zusammen:

$$(c^T z - c^T x_j)^n \leq R^n \text{ vol } B_n e^{-\frac{k}{2n+1}} \cdot \frac{n(\overbrace{c^T z - c^T x_0}^{\leq R})^{n-1}}{r^{n-1} \text{vol } B_{n-1}}.$$

Also, da $1 \leq \frac{R}{r}$:

$$c^T z - c^T x_j \leq \left(\frac{n \text{ vol } B_n}{\text{vol } B_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^2}{r} e^{-\frac{k}{2(n+1)n}}.$$

□

Aus dem letzten Lemma folgt das Theorem von Grötschel, Lovász und Schrijver unmittelbar.

Der hier vorgestellte Algorithmus ist an einer Stelle sehr idealisiert: Wir haben angenommen, dass wir mit unendlicher Genauigkeit rechnen können; aber in der Definition von b, das zur Bestimmung von E_k verwendet wird, wird eine Wurzel gezogen.

Der Algorithmus kann leicht verändert werden, so dass er mit vorgegebener Bitkomplexität läuft. Die Analyse wird aber deutlich technischer.

Prof. Dr. F. Vallentin, Dr. A. Gundert, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90, 50931 Köln, Deutschland
E-mail address: `frank.vallentin@uni-koeln.de, anna.gundert@uni-koeln.de`