KAPITEL 7 — DAS ELIMINATIONSVERFAHREN VON FOURIER UND MOTZKIN

F. VALLENTIN, A. GUNDERT

Ein algorithmisches Grundproblem in der Polyedertheorie ist zu entscheiden, ob ein Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ nicht leer ist.
In der linearen Algebra hat man für ein ähnliches Problem, zu entscheiden, ob die Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ eines linearen Gleichungssystems nicht leer ist, das Eliminationsverfahren von Gauß.
Wir lernen hier ein ähnliches Verfahren für unser Problem kennen.

1. Fourier-Motzkin-Elimination

Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m$. Ziel ist es, $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ zu finden bzw. zu entscheiden (mit mathematischer Sicherheit), dass es ein solches x nicht gibt.

<u>Idee</u>: Eliminiere die Variable x_1; Finde $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}\times(n-1)},\ \tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, so dass

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \Leftrightarrow\ \exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1} : \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}.$$

<u>Dazu</u>: Multipliziere Zeilen von A und entsprechende Einträge von b mit positiven Konstanten. Dann hat das System $Ax \leq b$ nach Umnummerierung der Zeilen folgende Gestalt:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} 1 & (a'_1)^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (a'_r)^T \\ -1 & (a'_{r+1})^T \\ \vdots & \vdots \\ -1 & (a'_{r+s})^T \\ 0 & (a'_{r+s+1})^T \\ \vdots & \vdots \\ 0 & (a'_m)^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

wobei $(a'_i)^T \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$ die i-te Zeile von A ist, in der das erste Element gelöscht wurde (es kann passieren, dass $r = 0$ oder $s = 0$ ist). Betrachte die ersten r Bedingungen:

$$x_1 + (a'_i)^T \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=\tilde{x}} \leq b_i \Rightarrow x_1 \leq b_i - (a'_i)^T\tilde{x}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Date: 7. Juli 2014.

Genauso die nächsten s Bedingungen:

$$x_1 + (a'_{r+j})^T \tilde{x} \le b_{r+j} \Rightarrow x_1 \ge (a'_{r+j})^T \tilde{x} - b_{r+j}, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Zusammen gilt also

$$(**) \qquad \max_{j=1,\ldots,s} (a'_{r+j})^T \tilde{x} - b_{r+j} \le x_1 \le \min_{i=1,\ldots,r} b_i - (a'_i)^T \tilde{x}.$$

(Falls $s = 0$, dann ist $\max_{j=1,\ldots,s}(a'_{r+j})^T \tilde{x} - b_{r+j} = -\infty$ und falls $r = 0$, ist $\min_{i=1,\ldots,r} b_i - (a'_i)^T \tilde{x} = +\infty$. In diesen Fällen ist also P in Richtung x_1 unbeschränkt.)
Also kann man x_1 eliminieren und das System $(*)$ ist lösbar genau dann, wenn das System

$$\begin{aligned} &(a'_{r+j})^T \tilde{x} - b_{r+j} \le b_i - (a'_i)^T \tilde{x}, \quad i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s \\ &(a'_i)^T \tilde{x} \le b_i, \quad i = r+s+1, \ldots, m \end{aligned}$$

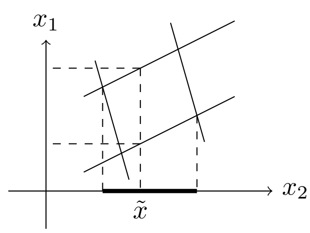
bzw. das System

$$(***) \qquad \begin{aligned} &((a'_{r+j})^T + (a'_i)^T)\tilde{x} \le b_i + b_{r+j}, \quad i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s \\ &(a'_i)^T \tilde{x} \le b_i, \quad i = r+s+1, \ldots, m. \end{aligned}$$

lösbar ist. Das neue System hat $r \cdot s + m - (r+s)$ viele Ungleichungen und $n-1$ Variablen.

Bemerkung 1.1.

a) $(***)$ *entspricht der Projektion des Polyeders* $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ *entlang der* x_1*-Achse.*



b) *Eine Lösung* $\tilde{x}$ *kann zu einer Lösung* $(x_1, \tilde{x})$ *von* $(*)$ *erweitert werden. Dazu muss* x_1 *die Ungleichungen* $(**)$ *erfüllen.*

c) *Das Verfahren wird fortgesetzt, indem nun sukzessive die Variablen* $x_2, x_3, \ldots$ *eliminiert werden, bis man bei* x_n *angekommen ist.*

d) *Für* x_n *ist es offensichtlich, ob das finale System eine Lösung besitzt. Das finale System hat eine Lösung* $\Leftrightarrow$ *das Ursprungssystem* $(*)$ *hat eine Lösung.*

2. Lösen von LPs mit Fourier-Motzkin

Wir wollen das LP

$$(\mathrm{LP}) \qquad \begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & x \in \mathbb{R}^n \\ & Ax \le b \end{aligned}$$

mit dem Eliminationsverfahren von Fourier und Motzkin lösen. Dazu führen wir eine zusätzliche Variable λ ein und betrachten das System

$$Ax \le b,\ \lambda \le c^T x.$$

Die Idee ist, dass λ dem größtmöglichen Wert der Zielfunktion $c^T x$, also dem Maximum, so dass alle Ungleichungen erfüllt sind, entsprechen soll. Wegen $\lambda \leq c^T x \Leftrightarrow \lambda - c^T x \leq 0$, ist das System äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man kann nun das LP lösen, indem man eine Lösung $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ von diesem System findet, so dass λ so groß wie möglich ist. Dazu eliminiert man $x_1, \ldots, x_n$ bis λ die letzte Variable ist. Dann wählt man λ so groß wie möglich.

3. Farkas Lemma mit Fourier-Motzkin

Lemma 3.1. *(Farkas)*
$Ax \leq b$ hat keine Lösung $\Leftrightarrow$ $\exists y \geq 0 : y^T A = 0,\ y^T b < 0$.

Beweis.

„$\Leftarrow$“: (hatten wir schon) Angenommen $Ax \leq b$ hat eine Lösung. Dann

$$0 = y^T Ax \leq y^T b < 0, \text{ Widerspruch.}$$

„$\Rightarrow$“: (algorithmisch mit Fourier-Motzkin)

Behauptung: $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{y^T A}, \underbrace{-1}_{y^T b}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine nicht-negative Linearkombination der Zeilen der Matrix $[A|b]$, gegeben durch y.

Beweis: (per Induktion nach n)

$n = 1$: Angenommen $Ax_1 \leq b$ hat keine Lösung, das heißt

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x_1 \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_{r+s} \\ b_{r+s+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

hat keine Lösung. Es gibt zwei Fälle, wie dies zustande kommen kann:

1.Fall: $0 \cdot x_1 \leq b_{r+s+k}$ und $b_{r+s+k} < 0$.
Wähle $y = (0, \ldots, 0, \underbrace{-\frac{1}{b_{r+s+k}}}_{\text{Position } r+s+k}, 0, \ldots, 0)^T$.

2.Fall: $b_i < -b_{r+j}$ für ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ und ein $j \in \{1, \ldots, s\}$.
Dann hat das System $Ax_1 \leq b$ keine Lösung, denn $-b_{r+j} \leq x_1 \leq b_i$, aber

$b_i < -b_{r+j}$. Wähle

$$y = (0, \ldots, 0, \underbrace{-\frac{1}{b_i + b_{r+j}}}_{\text{Position } i}, 0, \ldots, 0, \underbrace{-\frac{1}{b_i + b_{r+j}}}_{\text{Position } r+j}, 0, \ldots, 0)^T.$$

$\underline{n > 1}$: Betrachte das System $A'x' \leq b'$, in dem die Variable x_1 eliminiert wurde. Das System besitzt keine Lösung, also ist der Vektor $(0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{R}^n$ eine nicht-negative Linearkombination der Zeilen von $[A'|b']$. Nach Konstruktion sind die Zeilen der Matrix $[0\ A|b]$ nicht-negative Linearkombinationen der Zeilen von $[A|b]$. Also ist der Vektor $(0, \ldots, 0 - 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine nicht-negative Linearkombination der Zeilen von $[A|b]$.

$\square$

Prof. Dr. F. Vallentin, Dr. A. Gundert, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90, 50931 Köln, Deutschland

E-mail address: `frank.vallentin@uni-koeln.de, anna.gundert@uni-koeln.de`