KAPITEL 10 — DIE INNERE-PUNKTE-METHODE

F. VALLENTIN, A. GUNDERT

Vorteile:

+ Löst effizient lineare Programme (in Theorie und Praxis)
+ erweiterbar (zu einer größeren Klasse von Optimierungsproblemen)
+ einfach zu implementieren

1. Der zentrale Pfad

LP-Dualität

$$\text{(LP)} \qquad \begin{array}{llcll} \min & c^T x & = & \max & b^T y \\ & Ax = b & & & A^T y \leq c \\ & x \geq 0 & & & \end{array}$$

Damit die Nebenbedingungen der rechten Seite die gleiche Form haben, wie auf der linken Seite, führen wir sogenannte Schlupfvariablen $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$, $s_1, \ldots, s_n \geq 0$ ein, bzw. den Vektor $s = (s_1, \ldots, s_n)^T \in \mathbb{R}^n$, sodass $A^T y + s = c$. Dann haben die beiden linearen Programme von oben die Form

$$\begin{array}{llcll} \min & c^T x & = & \max & b^T y \\ & Ax = b & & & A^T y + s = c \\ & x \geq 0 & & & s \geq 0 \end{array}$$

Wir interessieren uns für optimale Lösungen der beiden Programme und erinnern uns an Kapitel 5:

Optimalitätskriterium

$$(x^*, y^*, s^*) \text{ ist optimal } \iff \begin{array}{l} A^T y^* + s^* = c \\ Ax^* = b \\ x_i^* s_i^* = 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ x^* \geq 0 \\ s^* \geq 0 \end{array}$$

Idee: Betrachte die (nichtlineare) Abbildung

$$F \colon \mathbb{R}^{2n+m} \to \mathbb{R}^{2n+m}$$
$$F(x, y, s) = \begin{bmatrix} A^T y + s - c \\ Ax - b \\ XSe \end{bmatrix},$$

wobei $X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, $S = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n)$, $e = (1, \ldots, 1)^T$, und finde (x^*, y^*, s^*) mit $F(x^*, y^*, s^*) = 0$, z.B. mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

Date: 21. Juli 2014.

Problem: Es gibt viele (x^*, y^*, s^*) mit $F(x^*, y^*, s^*) = 0$, die nicht zur Menge der zulässigen Lösungen

$$\mathcal{F} = \{(x, y, s) : A^T y + s = c, Ax = b, x \geq 0, s \geq 0\}$$

gehören. Sei

$$\mathcal{F}^0 = \{(x, y, s) : A^T y + s = c, Ax = b, x > 0, s > 0\}$$

die Menge der *strikt zulässigen Lösungen*, das heißt x und s liegen im Inneren des nicht-negativen Orthanten

$$\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \{z \in \mathbb{R}^n : z \geq 0\}.$$

Sei $\tau > 0$. Suche (x_τ, y_τ, s_τ), $x_\tau > 0$, $s_\tau > 0$, mit

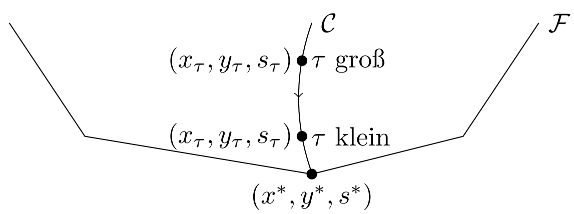
$$F(x_\tau, y_\tau, z_\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e \end{bmatrix}, \quad \text{d.h. } (x_\tau)_i (s_\tau)_i = \tau \; \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Wir zeigen gleich, dass $(x_\tau, y_\tau, s_\tau) \in \mathcal{F}^0$ existieren und eindeutig bestimmt sind.

Definition 1.1. *Die Menge*

$$\mathcal{C} = \{(x_\tau, y_\tau, s_\tau) : \tau > 0\}$$

heißt der zentrale Pfad *von (LP).*



Lemma 1.2. *Es gilt*

$$\lim_{\tau \to 0} c^T x_\tau - b^T y_\tau = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} c^T x_\tau - b^T y_\tau &= (A^T y_\tau + s_\tau)^T x_\tau - b^T y_\tau \\ &= y_\tau^T A x_\tau + s_\tau^T x_\tau - b^T y_\tau \\ &= y_\tau^T b + n\tau - b^T y_\tau \\ &= n\tau \to 0 \text{ für } \tau \to 0. \end{aligned}$$

□

Theorem 1.3. *Der zentrale Pfad existiert und ist eindeutig. Mit anderen Worten: Falls $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$ und $\tau > 0$, dann $\exists!(x_\tau, y_\tau, s_\tau)$:*

$$F(x_\tau, y_\tau, s_\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e \end{bmatrix}, \quad x_\tau > 0, \; s_\tau > 0.$$

Der Beweis benötigt noch etwas Vorarbeit.

Definition 1.4. *Definiere*

$$H^0 = \{(x,s) : \exists y : (x,y,s) \in \mathcal{F}^0\},$$

und die Barrierefunktion

$$f_\tau \colon H^0 \to \mathbb{R}$$
$$f_\tau(x,s) = \frac{1}{\tau} x^T s - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i s_i).$$

[Falls (x,s) gegen den Rand von H^0 läuft, dann $f_\tau(x,s) \to +\infty$].
Ziel: An (x_τ, s_τ) nimmt f_τ sein Minimum an.

Lemma 1.5. *f_τ ist strikt konvex.*

Beweis.

i) Der Term $x^T s$ ist linear in H^0:
Sei $\bar{x}$ mit $A\bar{x} = b$ gegeben. Dann gilt für $(x,s) \in H^0$:

$$\begin{aligned} x^T s &= x^T(c - A^T y) \\ &= x^T c - b^T y \\ &= x^T c - (A\bar{x})^T y \\ &= x^T c - \bar{x}^T A^T y \\ &= x^T c - \bar{x}^T (c - s). \end{aligned}$$

ii) Die Funktion $t \mapsto -\ln t$ ist strikt konvex, weil die zweite Ableitung $t \mapsto \frac{1}{t^2} > 0$ ist.

Aus i) und ii) folgt die Behauptung. □

Lemma 1.6. *f_τ ist nach unten beschränkt, d.h.*

$$\exists C : f_\tau(x,s) \geq C \ \forall (x,s) \in H^0.$$

Beweis. → Aufgabe 13.3. □

Lemma 1.7. *Für $K \geq 0$ ist die Menge $\{(x,s) \in H^0 : x^T s \leq K\}$ beschränkt.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus Aufgabe 13.2. □

Lemma 1.8. *Sei $\kappa \in \mathbb{R}$. Dann ist die Menge*

$$\{(x,s) \in H^0 : f_\tau(x,s) \leq \kappa\}$$

in einer kompakten Menge enthalten.

Beweis. Für $g(t) = t - \ln t - 1$ ist

$$f_\tau(x,s) = \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{x_i s_i}{\tau}\right) + n - n \ln \tau.$$

Dann

$$f_\tau(x,s) \leq \kappa \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{x_i s_i}{\tau}\right) \leq \bar{\kappa} = \kappa - n + n \ln \tau.$$

Für Index $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} g(\frac{x_i s_i}{\tau}) \leq \bar{\kappa} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} g(\frac{x_j s_j}{\tau}) \leq \bar{\kappa},$$

weil $g(t) \geq 0$ für $t \geq 0$.
Weil $g(t) \to \infty$ für $t \to 0$ oder $t \to \infty$, existiert ein M, sodass

$$\frac{1}{M} \leq x_i s_i \leq M, \quad i = 1, \dots, n.$$

Also

$$x^T s = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i \leq nM.$$

Nach Lemma 1.8 existiert ein M_u mit

$$x_i \leq M_u, \quad s_i \leq M_u.$$

Also

$$\frac{1}{M} \leq x_i s_i \leq M_u s_i \quad \Rightarrow s_i \geq \frac{1}{M M_u}, \text{ genauso } x_i \geq \frac{1}{M M_u}.$$

Also sind die x_i und s_i nach oben und unten beschränkt und somit ist die Menge $\{(x, s) \in H^0 : f_\tau(x, s) \leq \kappa\}$ in einer kompakten Menge enthalten. □

Nun können wir beweisen, dass der zentrale Pfad existiert und eindeutig ist.

Beweis. (Theorem 1.3)
Weil f_τ strikt konvex und die Menge $\{(x, s) \in H^0 : f_\tau(x, s) \leq \kappa\}$ in einer kompakten Menge enthalten ist, besitzt f_τ ein eindeutiges Minimum (x^*, s^*).

Behauptung: $x^* = x_\tau,\ s^* = s_\tau$.

Beweis: (x^*, s^*) löst das Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min\ & f_\tau(x, s) \\ & Ax = b \\ & A^T y + s = c \\ & x > 0, s > 0 \end{aligned}$$

(in den Variablen x, y, s). Insbesondere ist (x^*, s^*) ein lokales Minimum für

$$\begin{aligned} \min\ & f_\tau(x, s) \\ & Ax = b \\ & A^T y + s = c. \end{aligned}$$

Nun wenden wir ein Theorem aus der Analysis an:

Theorem 1.9. *(Extrema mit Nebenbedingungen/Lagrange-Multiplikatoren)*
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, seien $f : U \to \mathbb{R}$, $g_1, \dots, g_N : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Falls $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x^*) = \ldots = g_N(x^*) = 0$ ist, dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ (Multiplikatoren) mit

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \nabla g_i(x^*).$$

Hier haben wir die Situation:

$$\begin{aligned}
&\nabla f_\tau(x,s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{\tau} - X^{-1}e \\ 0 \\ \frac{x}{\tau} - S^{-1}e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_\tau(x,s) \\ \frac{\partial}{\partial y} f_\tau(x,s) \\ \frac{\partial}{\partial s} f_\tau(x,s) \end{bmatrix}, \\
&g_1(x,y,s) = [Ax-b]_1, \ldots, g_m(x,y,s) = [Ax-b]_m, \\
&g_{m+1}(x,y,s) = [A^Ty+s-c]_1, \ldots, g_{m+n}(x,y,s) = [A^Ty+s-c]_n.
\end{aligned}$$

Also $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^n$:

(a) $$\frac{s}{\tau} - X^{-1}e = A^T\lambda$$

(b) $$0 = A\mu$$

(c) $$\frac{x}{\tau} - S^{-1}e = \mu.$$

Aus (b) und (c) folgt $A(\frac{x}{\tau} - S^{-1}e) = 0$.
(a) multipliziert mit $(\frac{x}{\tau} - S^{-1}e)^T$ liefert:

$$\underbrace{\left(\frac{x}{\tau} - S^{-1}e\right)^T A^T\lambda}_{=0} = \underbrace{\left(\frac{x}{\tau} - S^{-1}e\right)^T \left(\frac{s}{\tau} - X^{-1}e\right)}_{\left(\frac{1}{\tau}Xe - S^{-1}e\right)^T\left(\frac{1}{\tau}Se - X^{-1}e\right)}.$$

Definiere $X^{\frac{1}{2}} = \text{diag}\,(\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$ und $S^{\frac{1}{2}} = \text{diag}\,(\sqrt{s_1}, \ldots, \sqrt{s_n})$. Dann

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{\tau}Xe - S^{-1}e\right)^T \overbrace{(X^{-\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}})(X^{\frac{1}{2}}S^{-\frac{1}{2}})}^{=I} \left(\frac{1}{\tau}Se - X^{-1}e\right) \\
&= \|\frac{1}{\tau}(XS)^{\frac{1}{2}}e - (XS)^{-\frac{1}{2}}e\|^2.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow XSe = \tau e.$ □

Definition 1.10. *Sei $(x,y,s) \in \mathcal{F}^0$. Das* Dualitätsmaß μ *von (x,y,s) ist*

$$\mu = \frac{x^Ts}{n} = c^Tx - b^Ty.$$

Definition 1.11. *Sei $\theta \in [0,1)$. Die* Nachbarschaft *des zentralen Pfads ist*

$$N(\theta) = \{(x,y,s) \in \mathcal{F}^0 : \|XSe - \mu e\| \leq \theta\mu\}.$$

Lemma 1.12.

a) $(x,y,s) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x,y,s) \in N(0)$.
b) Falls $\|XSe - \mu e\| < \mu$, d.h. $\theta < 1$, dann ist $x > 0, s > 0$.

Beweis.

a) klar.
b) Falls $x_i = 0$ oder $s_i = 0$, dann

$$\|XSe - \mu e\| \geq |x_is_i - \mu| = \mu, \text{ aber } \theta < 1.$$

□

2. Der Algorithmus und seine Analyse

Betrachte

$$F(x,y,s) = \begin{bmatrix} A^T y + s - c \\ Ax - b \\ XSe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e \end{bmatrix}.$$

Sei $(x,y,s) \in \mathcal{F}^0$. Linearisiere F an (x,y,s):

$$F(x,y,s) + \nabla F(\Delta x, \Delta y, \Delta s),$$

wobei

$$\nabla F(\Delta x, \Delta y, \Delta s) = \begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix}$$

mit

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta s) \in \mathbb{R}^{2n+m} \text{ und } F(x,y,s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ XSe \end{bmatrix}$$

Definition 2.1. *Für den* Zentrierungsparameter $\sigma \in [0,1]$ *definiere den* modifizierten Newton-Schritt $(\Delta x, \Delta y, \Delta s) \in \mathbb{R}^{2n+m}$ *durch das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -XSe + \sigma \mu e \end{bmatrix}.$$

Nun können wir den Algorithmus angeben:

<u>Innere-Punkte-Methode</u>:

Input : $\theta = 0.4$, $\sigma = 1 - \frac{0.4}{\sqrt{n}}$, Startpunkt $(x_0, y_0, s_0) \in N(\theta)$, N = Anzahl Iterationen

for $k = 0$ ***to*** $N-1$ **do**

Bestimme $(\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta s_k)$ durch Löse des LGS

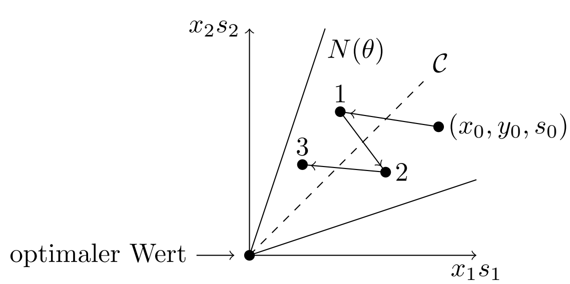
$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S_k & 0 & X_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \\ \Delta s_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -X_k S_k e + \sigma \mu_k e \end{bmatrix}$$

$(x_{k+1}, y_{k+1}, s_{k+1}) = (x_k, y_k, s_k) + (\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta s_k)$.

end

Algorithmus 1 : Innere-Punkte-Methode

<u>Bild dazu</u>:



Lemma 2.2. *Falls* $(x_k, y_k, s_k) \in \mathcal{F}^0$, *dann gilt*

a) $(\Delta x_k)^T(\Delta s_k) = 0$.

b) $\mu_k = \underbrace{(1 - \frac{0.4}{\sqrt{n}})}_{\sigma} \mu_{k-1}$.

Beweis.

a) $\to$ Aufgabe 13.4.

b)

$$\begin{aligned} x_{k+1}^T s_{k+1} &= (x_k + \Delta x_k)^T(s_k + \Delta s_k) \\ &= x_k^T s_k + x_k^T \Delta s_k + \Delta x_k^T s_k + \underbrace{\Delta x_k^T \Delta s_k}_{=0} \\ &= \sigma x_k^T s_k, \end{aligned}$$

denn aus der dritten Zeile des LGS im Algorithmus ergibt sich

$$S_k \Delta x_k + X_k \Delta s_k = -X_k S_k e + \sigma \mu_k e, \tag{1}$$

und durch Aufsummieren der Einträge in (1) erhält man

$$s_k^T \Delta x_k + x_k^T \Delta s_k = -x_k^T s_k + n\sigma\mu_k,$$

also

$$x_k^T s_k + s_k^T \Delta x_k + x_k^T \Delta s_k = n\sigma\mu_k = n\sigma \frac{x_k^T s_k}{n} = \sigma x_k^T s_k.$$

□

Beispiel 2.3. $\mu_0 = 10^6,\ n = 10000,\ N = 5000$. *Dann*

$$\mu_N = (1 - \frac{0.4}{\sqrt{10000}})^N \mu_0 = (0.996)^N \mu_0 \leq 0.002$$

Jetzt fehlt nur noch zu zeigen, dass $(x_k, y_k, s_k) \in \mathcal{F}^0$. Wir zeigen, dass (x_k, y_k, s_k) sogar in $N(\theta)$ liegt.

Lemma 2.4. *Seien* $u, v \in \mathbb{R}^n,\ u^T v \geq 0$. *Dann gilt*

$$\|UVe\| \leq 2^{-\frac{3}{2}} \|u + v\|^2.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} 0 \leq u^T v &= \sum_{u_i v_i > 0} u_i v_i + \sum_{u_i v_i < 0} u_i v_i \\ &= \sum_{i \in P} |u_i v_i| - \sum_{i \in M} |u_i v_i|, \end{aligned}$$

wobei

$$P = \{i : u_i v_i > 0\}, \quad M = \{i : u_i v_i < 0\},$$

also

$$\sum_{i \in M} |u_i v_i| \leq \sum_{i \in P} |u_i v_i|. \tag{$*$}$$

Somit

$$\begin{aligned}
\|UVe\| &= \left(\|(u_iv_i)_{i\in P}\|^2 + \|(u_iv_i)_{i\in M}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(1)}{\leq} \left(\|(u_iv_i)_{i\in P}\|_1^2 + \|(u_iv_i)_{i\in M}\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(*)}{\leq} \left(2\|(u_iv_i)_{i\in P}\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}\|(u_iv_i)_{i\in P}\|_1 \\
&\overset{(2)}{\leq} \sqrt{2}\|(\frac{1}{4}(u_i+v_i)^2)_{i\in P}\|_1 \\
&= 2^{-\frac{3}{2}} \sum_{i\in P}(u_i+v_i)^2 \\
&\leq 2^{-\frac{3}{2}}\|u+v\|^2.
\end{aligned}$$

Dabei gilt (1), weil $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$, und (2) gilt, da für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ stets $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2$ erfüllt ist. □

Lemma 2.5. *Sei $(x_k, y_k, z_k) \in N(0.4)$. Dann gilt*

$$\|X_{k+1}S_{k+1}e - \mu_{k+1}e\| \leq 0.2\mu_k.$$

D.h. insbesondere $(x_{k+1}, y_{k+1}, s_{k+1}) \in N(0.4)$.

Beweis.

1.Behauptung: $\|X_{k+1}S_{k+1}e - \mu_{k+1}e\| = \|\Delta X_k \Delta S_k e\|$.

Beweis: Betrachte den i-ten Eintrag der Vektoren:

$$\begin{aligned}
&(x_{k+1})_i(s_{k+1})_i - \mu_{k+1} \\
&= ((x_k)_i + (\Delta x_k)_i)((s_k)_i + (\Delta s_k)_i) - \underbrace{\sigma\mu_k}_{\text{Lemma 2.2.b)}} \\
&= (x_k)_i(s_k)_i + (x_k)_i(\Delta s_k)_i + (\Delta x_k)_i(s_k)_i + (\Delta x_k)_i(\Delta s_k)_i - \sigma\mu_k \\
&= (x_k)_i(s_k)_i - (x_k)_i(s_k)_i + \sigma\mu_k + (\Delta x_k)_i(\Delta s_k)_i - \sigma\mu_k \\
&= (\Delta x_k)_i(\Delta s_k)_i
\end{aligned}$$

2.Behauptung: $\|\Delta X_k \Delta S_k e\| \leq 0.2\mu_k$.

Beweis: Definiere $D_k = X_k^{\frac{1}{2}} S_k^{-\frac{1}{2}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\Delta X_k \Delta S_k e\| &= \|D_k^{-1}\Delta X_k D_k \Delta S_k e\| \\
&\leq 2^{-\frac{3}{2}}\|D_k^{-1}\Delta x_k + D_k \Delta s_k\|^2.
\end{aligned}$$

nach Lemma 2.4. Nun ist

$$D_k^{-1}\Delta x_k + D_k\Delta s_k = (X_kS_k)^{-\frac{1}{2}}(-X_kS_ke + \sigma\mu_k e),$$

weil

$$S_k\Delta x_k + X_k\Delta s_k = -X_kS_ke + \sigma\mu_k e$$

gilt, und dies multipliziert mit $(X_k S_k)^{-\frac{1}{2}}$ liefert die obige Gleichung. Also

$$\begin{aligned}\|\Delta X_k \Delta S_k e\| &\leq 2^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-(x_k)_i (s_k)_i + \sigma \mu_k)^2}{(x_k)_i (s_k)_i} \\ &\leq 2^{-\frac{3}{2}} \frac{\|X_k S_k e - \sigma \mu_k e\|^2}{\min_{i=1,\ldots,n} (x_k)_i (s_k)_i}.\end{aligned}$$

Da $(x_k, y_k, s_k) \in N(\theta)$, gilt $\min_{i=1,\ldots,n} (x_k)_i (s_k)_i \geq (1-\theta)\mu_k$, denn

$$\|X_k S_k e - \mu_k e\| \leq \theta \mu_k \Rightarrow |(x_k)_i (s_k)_i - \mu_i| \leq \theta \mu_k \Rightarrow (x_k)_i (s_k)_i - \mu_k \geq -\theta \mu_k.$$

Desweiteren

$$e^T (X_k S_k e - \mu_k e) = x_k^T s_k - n\mu_k = 0.$$

Also

$$\begin{aligned}&\|X_k S_k e - \sigma \mu_k e\|^2 \\ &= \|(X_k S_k e - \mu_k e) + (1-\sigma)\mu_k e\|^2 \\ &= \|X_k S_k e - \mu_k e\|^2 + 2(1-\sigma)\mu_k e^T (X_k S_k e - \mu_k e) + (1-\sigma)^2 \mu_k^2 e^T e \\ &\leq \theta^2 \mu_k^2 + (1-\sigma)^2 \mu_k^2 n.\end{aligned}$$

Zusammen

$$\begin{aligned}\|\Delta X_k \Delta S_k e\| &\leq 2^{-\frac{3}{2}} \frac{\theta^2 \mu_k^2 + (1-\sigma)^2 \mu_k^2 n}{(1-\theta)\mu_k} \\ &\leq 0.2 \mu_k.\end{aligned}$$

□

Literatur

[1] S.J. Wright, *Primal-dual interior-point-methods*, SIAM, 1997.

Prof. Dr. F. Vallentin, Dr. A. Gundert, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90, 50931 Köln, Deutschland
E-mail address: frank.vallentin@uni-koeln.de, anna.gundert@uni-koeln.de