KAPITEL 4 — FLÜSSE IN NETZWERKEN

F. VALLENTIN, A. GUNDERT

1. Das Max-Flow-Min-Cut Theorem

Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$ zwei Knoten. Wir nennen s *Quelle* und t *Senke*.

Definition 1.1. *Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-*Fluss*, falls*

$$\forall v \in V \setminus \{s,t\} : \quad \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) \text{ gilt.}$$

(Flusserhaltungsgesetz)
Dabei schreiben wir kurz

$$\delta^+(v) = \delta^+(\{v\}) = \{(v,w) \in A : w \in V\},$$
$$\delta^-(v) = \delta^-(\{v\}) = \{(w,v) \in A : w \in V\}.$$

Der Wert *eines s-t-Flusses ist*

$$value(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a)$$

Ein s-t-Fluss heißt beschränkt *durch eine* Kapazitätsfunktion *$c\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, falls*

$$\forall a \in A : \quad f(a) \leq c(a) \text{ gilt.}$$

(Notation: $f \leq c$).

Ziel: Finde einen maximalen s-t-Fluss.
Wir haben also das folgende Maximierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max\ & \mathrm{value}(f) \\ & f\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & f \text{ ist } s\text{-}t\text{-Fluss} \\ & f(a) \leq c(a) \quad \forall a \in A \end{aligned}$$

Lemma 1.2. *Es seien ein gerichteter Graph $G = (V, A)$, Knoten $s, t \in V$ und eine Kapazitätsfunktion $c\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Sei f ein s-t-Fluss, der durch c beschränkt ist. Sei $U \subseteq V$ mit $s \in U, t \notin U$, so dass $\delta^+(U)$ ein s-t-Schnitt ist. Dann gilt*

$$value(f) \leq c(\delta^+(U)) = \sum_{a \in \delta^+(U)} c(a) \tag{1}$$

Es gilt Gleichheit in (1) genau dann, wenn

$$f(a) = c(a) \quad \forall a \in \delta^+(U) \text{ und}$$
$$f(a) = 0 \quad \forall a \in \delta^-(U)$$

Date: 26. Mai 2014.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\text{value}(f) &= \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a) \\
&= \sum_{v \in U} \left(\sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) \right) \quad \text{(wg. Flusserhaltung)} \\
&= \sum_{a \in \delta^+(U)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(U)} f(a) \\
&\leq \sum_{a \in \delta^+(U)} c(a).
\end{aligned}$$

□

Definition 1.3. *Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $a = (u, v)$ eine Kante. Definiere*

$$a^{-1} = (v, u) \text{ und } A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$$

Sei f ein s-t-Fluss und c eine Kapazitätsfunktion. Definiere den Residualgraph *$D_f = (V, A_f)$ durch*

$$A_f = \{a \in A : f(a) < c(a)\} \cup \{a^{-1} \in A^{-1} : f(a) > 0\}$$

Lemma 1.4. *Sei f ein s-t-Fluss mit $f \leq c$. Angenommen D_f enthält keinen gerichteten s-t-Weg. Sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten, die in D_f von s aus erreichbar sind. Dann gilt*

$$\mathit{value}(f) = c(\delta^+(U))$$

Insbesondere ist f maximal.

Beweis. Für $a \in \delta^+(U)$ gilt $a \notin A_f$, das heißt $f(a) = c(a)$. Für $a \in \delta^-(U)$ gilt $a^{-1} \notin A_f$, das heißt $f(a) = 0$. Also ist $\text{value}(f) = c(\delta^+(U))$ und f ist nach Lemma 1.2 maximal. □

Definition 1.5. *Sei P ein gerichteter Weg in D_f. Definiere $\chi^P \colon A \to \mathbb{R}$ durch*

$$\chi^P(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } P \text{ die Kante } a \text{ durchläuft} \\ -1, & \text{falls } P \text{ die Kante } a^{-1} \text{ durchläuft} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Theorem 1.6. *(Max-Flow = Min-Cut; Ford-Fulkerson, 1954)*
Es seien ein gerichteter Graph $D = (V, A)$, zwei Knoten $s, t \in V$ und eine Kapazitätsfunktion $c \colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Dann gilt

$$\max_{\substack{f \text{ ist } s\text{-}t\text{-Fluss} \\ f \leq c}} \mathit{value}(f) = \min_{\substack{U \subseteq V \\ s \in U, t \notin U}} c(\delta^+(U))$$

Beweis.

- $\underline{\max \leq \min}$: Wurde in Lemma 1.2 gezeigt.

- $\underline{\max \geq \min}$: Sei f ein maximaler s-t-Fluss mit $f \leq c$. Zu zeigen ist

  $$\text{value}(f) = c(\delta^+(U)) \text{ für ein } U \subseteq V \text{ mit } s \in U, t \notin U.$$

  Betrachte D_f. Falls es keinen gerichteten s-t-Weg in D_f gibt, können wir Lemma 1.4 anwenden und sind fertig. Angenommen es gibt einen s-t-Weg P in D_f. Dann ist $f' = f + \varepsilon\chi^P$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ebenfalls ein s-t-Fluss, der durch c beschränkt ist, mit

  $$\text{value}(f') = \text{value}(f) + \varepsilon$$

  Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von f.

□

Korollar 1.7. *Falls c ganzzahlig ist, das heißt $c(a) \in \mathbb{Z}\ \forall a \in A$, dann gibt es einen ganzzahligen maximalen s-t-Fluss.*

Beweis. Wähle $\varepsilon = 1$ im obigen Beweis. □

Algorithmus 1.8. *(Ford-Fulkerson)*

> **Input** : *Gerichteter Graph* $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $c \colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
> **Output** : *Maximaler s-t-Fluss f*
> *Setze* $f = 0$
> **while** $\exists$ *gerichteter s-t-Weg P in D_f* **do**
> | $f = f + \varepsilon\chi^P$, *wobei $\varepsilon > 0$ maximal gewählt, so dass $0 \leq f + \varepsilon\chi^P \leq c$ gilt*
> **end**

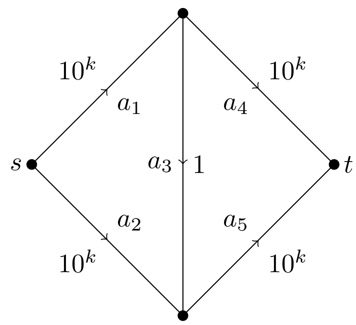
Satz 1.9. *Falls $c(a) \in \mathbb{Q}\ \forall a \in A$, dann terminiert der Ford-Fulkerson Algorithmus in endlich vielen Schritten; sonst im Allgemeinen nicht.*

Beweis. Wenn $c(a) \in \mathbb{Q}\ \forall a \in A$, dann existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $Kc(a) \in \mathbb{N}\ \forall a \in A$. Das heißt in jeder Iteration ist ε ein Vielfaches von $\frac{1}{K}$ und der Wert des Flusses vergrößert sich mindestens um $\frac{1}{K}$. Da der Wert $c(\delta^+(s))$ nicht überschreiten kann, terminiert der Algorithmus nach höchstens $Kc(\delta^+(s))$ vielen Schritten. □

Es gibt Beispiele mit $c(a) \in \mathbb{R}$, so dass der Algorithmus nicht terminiert. ($\rightarrow$ siehe Schrijver - CO - Buch, 10.4a)

2. Verbesserung des Ford-Fulkerson-Algorithmus

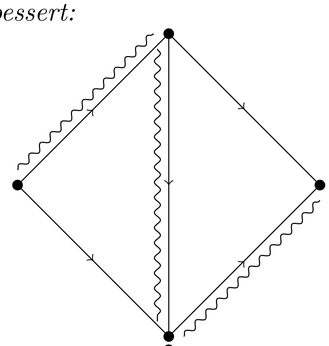
Beispiel 2.1. *Die Anzahl der Iterationen im Ford-Fulkerson Algorithmus hängt von der Wahl der Wege ab, entlang derer der Flusswert erhöht wird. Dadurch, dass es keine Vorschrift gibt, nach der man solche Wege wählt, kann die Anzahl der Iterationen unnötig hoch werden, wie das folgende Beispiel zeigt.*



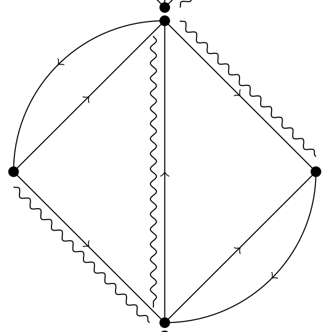
Offensichtlich ist $f = (f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), f(a_5)) = (10^k, 10^k, 0, 10^k, 10^k)$ *der s-t-Fluss mit maximalem Wert für dieses Netzwerk mit* $\mathit{value}(f) = 2 \cdot 10^k$.

Aber: wählt man die Wege im Ford-Fulkerson Algorithmus sehr ungünstig, dann wird der Wert des Flusses in jeder Iteration nur um 1 erhöht. Man könnte also insgesamt bis zu $2 \cdot 10^k$ *Iterationen durchführen, wie wir nun sehen werden (obwohl man im günstigsten Fall mit zwei Iterationen auskäme). Der Fluss wird immer entlang der Schlangenlinien verbessert:*

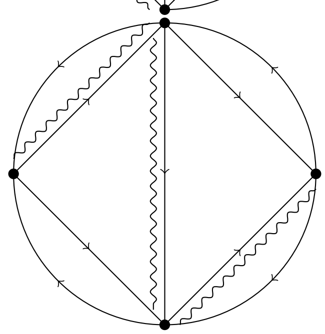
$f_1 = (0, 0, 0, 0, 0)$ D_{f_1}:



$f_2 = (1, 0, 1, 0, 1)$ D_{f_2}:



$f_3 = (1, 1, 0, 1, 1)$ D_{f_3}:



$\underline{f_4 = (2,1,1,1,2)}$

$\vdots$

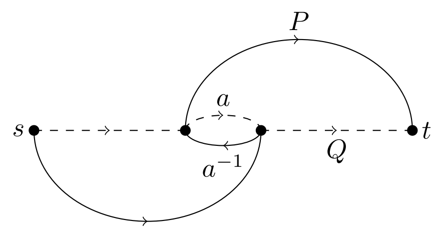
Und so weiter.

Problem: Die gewählten s-t-Wege in D_{f_k} waren nicht die kürzesten.

Lösung: (Dinits (1970), Edmonds-Karp (1972)) So etwas kann nicht passieren, wenn die gewählten s-t-Wege minimale Länge (bezogen auf die Anzahl der Kanten) haben.

Lemma 2.2. *Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$ zwei Knoten und $\mu(D) := dist(s, t)$. Sei $\alpha(D) \subseteq A$ die Menge von Kanten, die in einem kürzesten s-t-Weg vorkommen. Definiere $D' = (V, A \cup \alpha(D)^{-1})$. Dann gilt $\mu(D') = \mu(D)$ und $\alpha(D') = \alpha(D)$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\mu(D)$ und $\alpha(D)$ sich nicht verändern, wenn wir eine Kante $a^{-1} \in \alpha(D)^{-1}$ zu D hinzufügen. Angenommen das ist nicht so. Dann gibt es einen s-t-Weg $P \subseteq A \cup \{a^{-1}\}$, der durch a^{-1} geht und Länge höchstens $\mu(D)$ hat. Da $a \in \alpha(D)$, gibt es einen s-t-Weg $Q \subseteq A$, der durch a geht und Länge $\mu(D)$ hat. Wir haben also die folgende Situation:



Dann enthält $(P \cup Q) \setminus \{a, a^{-1}\}$ einen s-t-Weg der Länge $l < \mu(D)$. Widerspruch. $\square$

Satz 2.3. *Falls in jeder Iteration des Ford-Fulkerson Algorithmus ein kürzester s-t-Weg in D_f ausgewählt wird, beträgt die Anzahl der Iterationen höchstens $|V| \cdot |A|$. Insbesondere ist sie unabhängig von der Kapazitätsfunktion.*

Beweis. Falls wir einen Fluss f entlang eines kürzesten s-t-Weges P in D_f verbessern und einen neuen Fluss f' erhalten, dann ist die Kantenmenge von $D_{f'}$ in der Kantenmenge von $D' = (V, A_f \cup \alpha(D_f)^{-1})$ enthalten, deswegen gilt $\mu(D_{f'}) \geq \mu(D')$. Außerdem haben wir $\mu(D_f) = \mu(D')$ und $\alpha(D_f) = \alpha(D')$ nach Lemma 2.2.
Falls $\mu(D_{f'}) = \mu(D_f)$, dann gilt $\alpha(D_{f'}) \subseteq \alpha(D') = \alpha(D_f)$. Da wenigstens eine Kante aus P zu D_f aber nicht zu $D_{f'}$ gehört, haben wir strikte Inklusion $\alpha(D_{f'}) \subsetneq \alpha(D_f)$. Diese Situation ($\mu(D_{f'}) = \mu(D_f)$) kann maximal $|A|$-mal vorkommen, danach muss $\mu(D_{f'}) > \mu(D_f)$ sein. Da $\mu(D_f)$ sich höchstens $|V|$-mal vergrößern kann, folgt die Behauptung. $\square$

Prof. Dr. F. Vallentin, Dr. A. Gundert, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90, 50931 Köln, Deutschland
E-mail address: `frank.vallentin@uni-koeln.de, anna.gundert@uni-koeln.de`