Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2014

— Aufgabenblatt 12 —

Aufgabe 12.1 Löse das lineare Programm $\max\{c^{\mathsf{T}}x : Ax \leq b\}$ mit Hilfe des Simplexverfahrens, wobei $x_0 = (1,0,0)^{\mathsf{T}}$ die Startecke ist und wobei

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.2 Finde eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times 3}$, Vektoren $c \in \mathbb{R}^3$, $b \in \mathbb{R}^m$ und eine Startecke $x_0 \in \mathbb{R}^3$, so dass folgendes gilt: Erstens für die Ecken x_1, x_2, die das Simplexverfahren durchläuft, ist:

$$x_0 \neq x_1 = x_2.$$

Zweitens, das lineare Programm $\max\{c^{\mathsf{T}}x : Ax \leq b\}$ ist unbeschränkt.

Aufgabe 12.3 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix und es sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Zeige, dass das Volumen des Ellipsoids

$$\mathcal{E}(A,x) = \{y \in \mathbb{R}^n : (y-x)^{\mathsf{T}}A^{-1}(y-x) \leq 1\}$$

gleich $\sqrt{\det A} \cdot \operatorname{vol} B_n$ ist, wobei B_n die n-dimensionale Einheitskugel ist.

Aufgabe 12.4 Zeige, dass

$$\mathcal{E}(I_n, 0) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : y_1 \geq 0\} \subseteq \mathcal{E}(A', x')$$

mit

$$A' = \frac{n^2}{n^2-1}\left(I_n - \frac{2}{n+1}e_1e_1^{\mathsf{T}}\right), \quad x' = \frac{1}{n+1}e_1$$

gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, 8. Juli, 12:00 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.