Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2014

— Aufgabenblatt 13 —

Aufgabe 13.1 Beweise: Für $k \geq 1$ sei die Menge $K_k \subseteq \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} \xi_k &= \max\{c^{\mathsf{T}} x_j : 0 \leq j < k,\ x_j \in K\} \\ K_k &= K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^{\mathsf{T}} x \geq \xi_k\} \end{aligned}$$

definiert. Dann gilt $K_k \subseteq E_k$.

Aufgabe 13.2 Sei C eine positive Konstante und sei $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}) \in \mathcal{F}^o$. Zeige: Für $(x, y, s) \in \mathcal{F}^o$ mit $x^{\mathsf{T}} s \leq C$ und $i = 1 \ldots, n$ gilt

$$0 < x_i \leq \frac{1}{\xi}(C + \bar{x}^{\mathsf{T}} \bar{s}) \quad \text{und} \quad 0 < s_i \leq \frac{1}{\xi}(C + \bar{x}^{\mathsf{T}} \bar{s}),$$

wobei $\xi := \min_{i=1,\ldots,n} \min\{\bar{x}_i, \bar{s}_i\}$.

Aufgabe 13.3 Betrachte für $\tau > 0$ die Barrierefunktion

$$f_\tau : H^\circ \to \mathbb{R}, \quad f_\tau(x, s) = \frac{1}{\tau} x^{\mathsf{T}} s - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i s_i),$$

mit

$$H^\circ = \{(x, s) \in \mathbb{R}^{2n} : \exists y : (x, y, s) \in \mathcal{F}^o\}.$$

Zeige: Es gibt eine Konstante C, so dass $f_\tau(x, s) \geq C$ für alle $(x, s) \in H^\circ$.

Aufgabe 13.4 Gegeben sei eine Lösung $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ des Systems

$$\begin{pmatrix} 0 & A^{\mathsf{T}} & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -XSe + \sigma\mu e \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{aligned} &X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n),\ S = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n), \\ &e = (1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}},\ \mu = \frac{1}{n} x^{\mathsf{T}} s,\ \sigma \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Zeige, dass $(\Delta x)^{\mathsf{T}} (\Delta s) = 0$ gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, 15. Juli, 12:00 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist nicht erforderlich für die Klausurzulassung.