Sei r der größte Index, so dass Zeile a_r^T in einer Iteration aus A_t genommen wird, wobei $t = k, k+1, \dots, l$. Dies passiere in Schritt p. Weil $A_k = A_l$, gibt es ein q, so dass a_r^T wieder in A_q aufgenommen wird. Dann

$$k \leq p < q < l$$

Dann gilt für $j > r$

$$a_j^T \text{ kommt in } A_p \text{ vor} \iff a_j^T \text{ kommt in } A_q \text{ vor.}$$

Es gilt

$$u_p^T A y_q = c^T y_q > 0 .$$

Also gibt es ein j mit $(u_p)_j \, (a_j^T y_q) > 0$.

<u>Aber</u> <u>1. Fall</u> : a_j^T gehört nicht zu A_p . $(u_p)_j = 0$ $\lightning$

<u>2. Fall</u> : a_j^T gehört zu A_p

a) $j > r$: Dann $a_j^T y_q = 0$ $\lightning$

b) $j = r$: Dann $(u_p)_j < 0$ und $a_j^T y_q > 0$ $\lightning$

c) $j < r$: Dann $(u_p)_j \geq 0$ und $a_j^T y_q \leq 0$ $\lightning$.

$\boxtimes$

Jetzt: Wie startet man den Simplexalgorithmus, wenn man keine Ecke x_0 kennt?

OBdA: (LP) ist von der Form

$$\max\{c^T x : x \geq 0, Ax \leq b\}.$$

($\rightarrow$ Aufgabe 9.1: Dann besitzt $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax \leq b\}$ eine Ecke)

Idee: Um Ecke von P zu finden, füge Extravariablen hinzu und stelle ein neues LP auf, dass eine offensichtliche Ecke besitzt und dessen optimale Lösung eine Ecke von P liefert.

Extravariable: $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$

Neues LP: $\min e^T y$ mit $e = [1, \dots, 1]^T$

$$\begin{bmatrix} A & -I_m \\ -I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

offensichtliche Ecke: $x = 0$,

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } b_j \geq 0 \\ -b_j, & \text{falls } b_j < 0. \end{cases}, \quad j = 1, \dots, m$$

Dann ist $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ eine Ecke von

$$P' = \{ (x,y) : \ Ax - y \leq b, \ x \geq 0, \ y \geq 0 \},$$

weil $(x,y) \in P'$ und $\operatorname{rang} \begin{bmatrix} A & -I \\ -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}_{(x,y)} = n+m$.

Jetzt kann man den Simplexalgorithmus mit der Startecke (x,y) verwenden, um das neue LP zu lösen. Sei (x^*, y^*) die Ecke von P', die der Algorithmus liefert.

1. Fall $\quad e^T y^* > 0$.

Dann ist das Original-LP ungültig:

$\nexists x \geq 0 : Ax \leq b$, da $\exists j : y^*_j > 0$ und $[Ax - y^*]_j \leq b_j$.

2. Fall $\quad e^T y^* = 0$

Dann $y^* = 0$ und x^* ist eine Ecke von P, weil

$x^* \in P$ und $\operatorname{rang} \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}_{x^*} = n$.

Zur praktischen und theoretischen Effizienz des Simplex-algorithmus

+ sehr schnell bei vielen praxisrelevanten Eingaben
+ sehr gute Implementationen erhältlich (CPLEX, gurobi)
- Klee-Minty-Würfel (1972): Beispiel, dass der Algo. exponentiell viele Schritte im worst case benötigt.
+ Spielman-Teng (2004): „smoothed analysis" Algo. ist polynomiell, falls Eingabe leicht, zufällig „gestört" ist.

o offenes Problem („polynomielle Hirsch-Vermutung"): Ist der maximale Abstand zwischen zwei Ecken polynomiell in n, m?