Kapitel 9 Die Ellipsoidmethode

§ 1 Grundlegendes zu Ellipsoiden

Def.: Eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definieren das <u>Ellipsoid</u>

$$\mathcal{E}(A,x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : (y-x)^T A^{-1} (y-x) \le 1 \}.$$

Bsp.: $\mathcal{E}(r^2 I_n, 0) = r \mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}_n = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le 1 \}$
n-dim. Einheitskugel

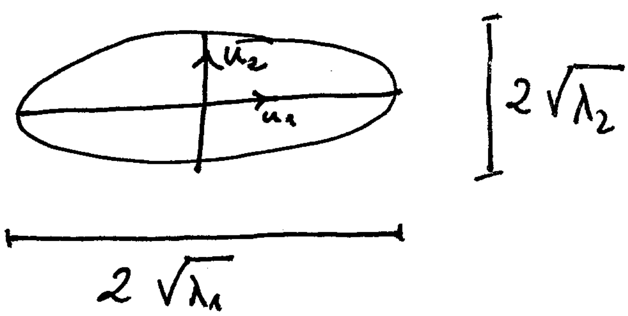
Eigenschaften:

Hauptachsentransformation / Spektralzerlegung

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ die Eigenwerte von A und $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ Orthonormalbasis bestehend aus zugehörenden Eigenvektoren

u_i : Hauptachsenrichtung
$2\sqrt{\lambda_i}$: Länge der Hauptachse



Volumen von $\mathcal{E}(A,x)$:

$$\operatorname{vol} \mathcal{E}(A,x) = \sqrt{\det A} \cdot \operatorname{vol} B_n,$$

wobei $\operatorname{vol} B_n = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, $\quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

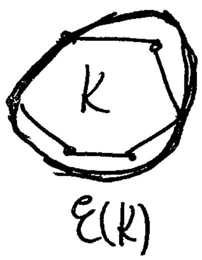
$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

<u>Bew.:</u> $\rightarrow$ Aufgabe 12.3

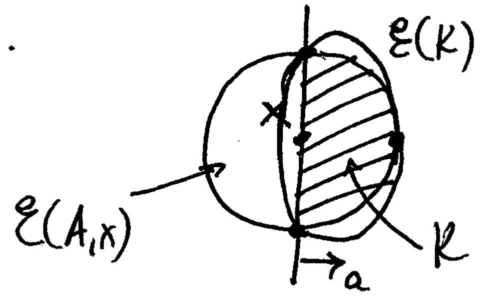
Hinweis: Ellipsoide sind affin lineare Bilder von B_n.

<u>Satz</u> Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe und kompakte Menge. Dann $\exists!$ Ellipsoid $\mathcal{E}(K)$ mit $K \subseteq \mathcal{E}(K)$ und mit minimalem Volumen. (Die beste äußere Approximation von K). $\mathcal{E}(K)$ heißt das Loewner-John-Ellipsoid von K.



<u>Bew.:</u> $\rightarrow$ Vorlesung „Konvexe Optimierung" WS 2015/16.

<u>Hier:</u> Spezialfall $K = \mathcal{E}(A,x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x\}$ mit $a \neq 0$.



Lemma Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$.

Dann

$$\mathcal{E}\left(\mathcal{E}(A,x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x\}\right) = \mathcal{E}(A',x')$$

mit

$$A' = \frac{n^2}{n^2-1}\left(A - \frac{2}{n+1} bb^T\right), \quad x' = x + \frac{1}{n} b,$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{a^T A a}} A a.$$

Desweiteren gilt

$$\operatorname{vol} \mathcal{E}(A',x') \,/\, \operatorname{vol} \mathcal{E}(A,x) < e^{-\frac{1}{2(n+1)}} < 1.$$

"Bew.": - $\mathcal{E}(A,x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x\} \subseteq \mathcal{E}(A',x')$:

folgt aus Aufgabe 12.4.

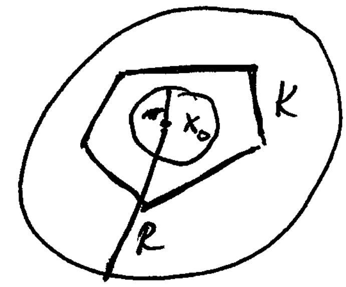
- Dass $\mathcal{E}(A',x')$ tatsächlich das Loewner-John-Ellipsoid ist: Elementares Nachrechnen (etwas nervig).

- Aussage über Quotient der Volumina: ebenfalls Nachrechnen (etwas weniger nervig).

§ 2 Trennen und optimieren

Voraussetzung: Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von konvexen und kompakten Mengen. Ang. für jeden $K \in \mathcal{K}$ kennen wir $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r, R > 0$ mit

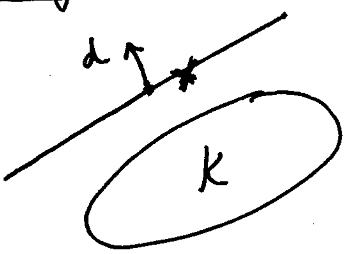
$$x_0 + r B_n \subseteq K \subseteq x_0 + R B_n$$



Trennungsproblem

Eingabe $x \in \mathbb{R}^n$, $K \in \mathcal{K}$

Ausgabe „$x \in K$" oder $d \in \mathbb{R}^n$ mit $d^T x > \max_{y \in K} d^T y$



Die Hyperebene
$$\{y \in \mathbb{R}^n : d^T y = d^T x\}$$
trennt x und K.

Falls $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein (beschränkter) Polyeder ist, dann kann man das Trennungsproblem wie folgt lösen: Überprüfe für gegebenen x alle linearen Ungleichungen $a_i^T x \leq b_i$, $i = 1, \dots, m$.

Dann $x \in K \iff$ alle Ungleichungen erfüllt.

Falls $a_i^T x > b_i$, wähle $d = a_i$.

Optimierungsproblem

Eingabe $c \in \mathbb{R}^n$, $\|c\| = 1$, $\varepsilon > 0$, $K \in \mathcal{K}$.

Ausgabe $x \in K$ mit $c^T x \geq \max\limits_{y \in K} c^T y - \varepsilon$.

Theorem (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1981; basierend auf Ellipsoidmethode)

Für die Klasse $\mathcal{K}$ lässt sich das Optimierungsproblem durch N-fachen Lösen des Trennungsproblems lösen, wobei N so gewählt ist, dass

$$2 \frac{R^2}{r} e^{-\frac{N}{2(n+1)n}} \leq \varepsilon$$

gilt.