Ellipsoidmethode

$E_0 = \mathcal{E}(R^2 I_n, x_0)$

for $k = 0, \dots, N-1$:

Löse Trennungsproblem für x_k, der Mittelpunkt von E_k

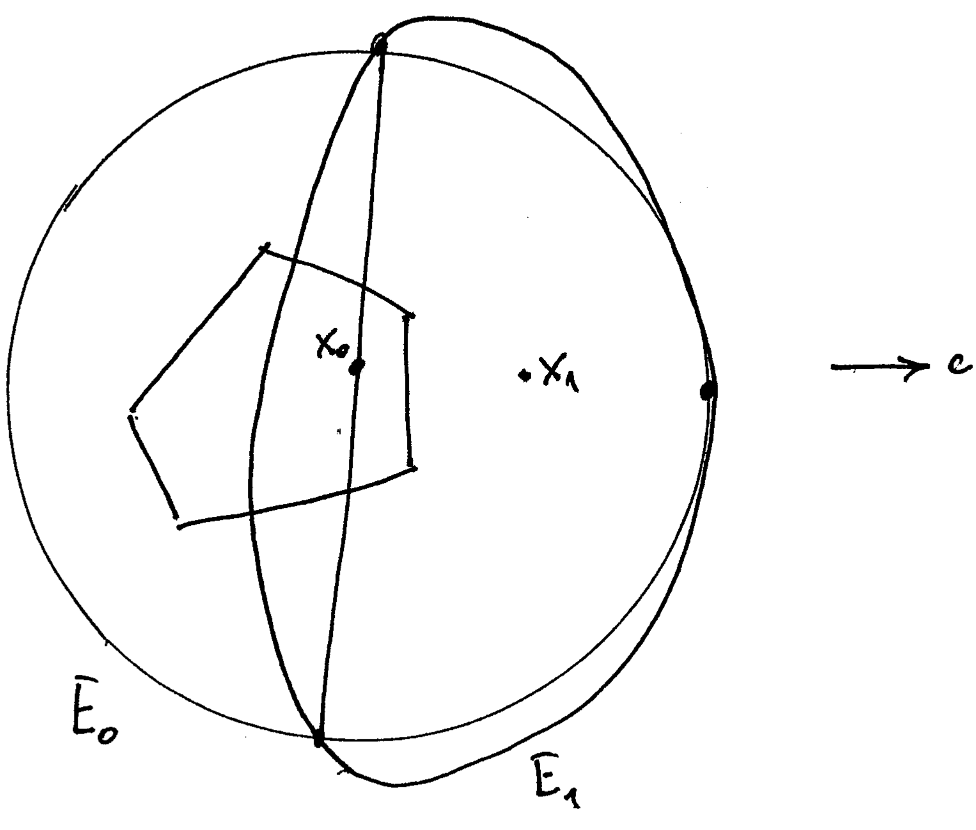
if $x_k \in K$:

$a = c$

else

$a = -d$

$E_{k+1} = \mathcal{E}(E_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x_k\})$.



Lemma Seien

$$\xi_k = \max\{c^T x_j : 0 \le j < k,\ x_j \in K\}$$

und

$$K_k = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \ge \xi_k\}.$$

Dann gilt $K_k \subseteq E_k$.

Bew.: $\to$ Aufgabe 13.1 (per Induktion nach k)

Lemma Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei j ein Index mit $0 \le j < k$ und $\xi_k = c^T x_j$. Dann gilt

$$c^T x_j \ge \max_{y \in K} c^T y - 2\frac{R^2}{r} e^{-\frac{k}{2(n+1)n}}$$

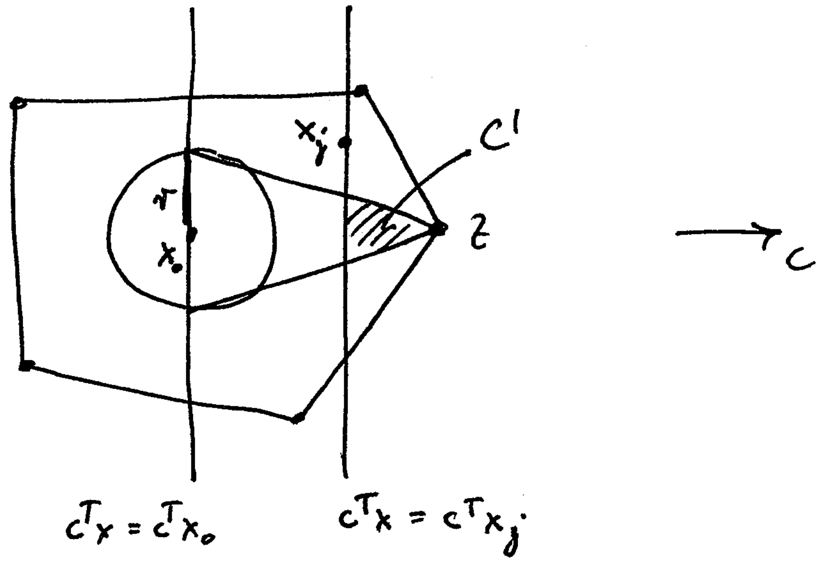
Bew.: Sei $z \in K$ eine optimale Lösung: $c^T z = \max\limits_{y \in K} c^T y$.

Betrachte den runden Kegelstumpf C mit Spitze z und Basis

$$x_0 + r B_n \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T x = c^T x_0\}.$$

Sei

$$C' = C \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \ge c^T x_j\}.$$



Das Volumen von C' ist

$$\operatorname{vol} C' = \frac{r^{n-1} \operatorname{vol} B_{n-1}}{n} \left(c^T z - c^T x_0\right) \left(\frac{c^T z - c^T x_j}{c^T z - c^T x_0}\right)^n .$$

Nach dem vorhergehendem Lemma ist $C' \subseteq K_k \subseteq E_k$.

Also

$$\operatorname{vol} C' \leq \operatorname{vol} E_k \leq \operatorname{vol} E_0 \cdot \left(e^{-\frac{1}{2n+1}}\right)^k$$
$$< R^n \operatorname{vol} B_n \; e^{-\frac{k}{2n+1}} .$$

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz ergibt:

$$| c^T z - c^T x_0 | \leq \underbrace{\|c\|}_{=1} \; \underbrace{\|z - x_0\|}_{\leq R} \leq R .$$

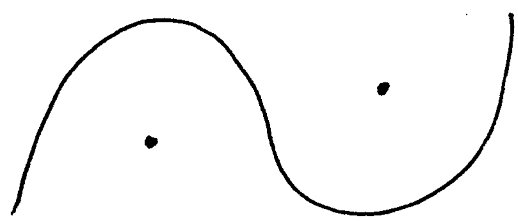
Zusammen:

$$\left(c^T z - c^T x_j\right)^n \leq R^n \operatorname{vol} B_n \; e^{-\frac{k}{2n+1}} \cdot \frac{n \, \overbrace{\left(c^T z - c^T x_0\right)}^{\leq R}{}^{n-1}}{r^{n-1} \operatorname{vol} B_{n-1}} .$$

Also, da $1 \leq \frac{R}{r}$:

$$c^T z - c^T x_{j} \leq \left(\frac{n \operatorname{vol} B_n}{\operatorname{vol} B_{n-1}} \right)^{1/n} \frac{R^2}{r} e^{-\frac{k}{2(n+1)n}} . \qquad \boxtimes$$

Aus dem letzten Lemma folgt das Theorem von G.L.S. unmittelbar.



Der hier vorgestellte Algorithmus ist an einer Stelle sehr idealisiert: Wir haben angenommen, dass wir mit unendlicher Genauigkeit rechnen können; aber in der Definition von b, das zur Bestimmung von E_k verwendet wird, wird eine Wurzel gezogen.
Algorithmus kann leicht verändert werden, so dass er mit vorgegebener Bitkomplexität läuft. Die Analyse wird aber deutlich technischer.