Kapitel 10 Die Innere-Punkte-Methode

§ 1 Der zentrale Pfad

LP-Dualität:

$$\begin{array}{lll} \min\ c^T x & = & \max\ b^T y \\ Ax = b & & A^T y \le c \\ x \ge 0 & & \end{array} \qquad (LP)$$

Führe $s \in \mathbb{R}^n$, $s \ge 0$ ein: $A^T y \le c \iff A^T y + s = c$, $s \ge 0$.

Optimalitätskriterium:

$$(x^*, y^*, s^*) \text{ ist optimal} \iff \begin{array}{ll} A^T y^* + s^* & = c \\ A x^* & = b \\ x_i^* s_i^* & = 0 \quad , \ i = 1, \dots, n \\ x^* & \ge 0 \\ s^* & \ge 0 . \end{array}$$

Idee: Betrachte die (nichtlineare) Abbildung

$F : \mathbb{R}^{2n+m} \to \mathbb{R}^{2n+m}$

$$F(x, y, s) = \begin{bmatrix} A^T y + s - c \\ Ax - b \\ XSe \end{bmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{l} X = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n) \\ S = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n) \\ e = (1, \dots, 1)^T . \end{array}$$

und suche (x^*, y^*, s^*) mit $F(x^*, y^*, s^*) = 0$, z.B. mit Hilfe des Newtonverfahrens.

<u>Problem</u> Es gibt viele (x^*, y^*, s^*) mit $F(x^*, y^*, s^*) = 0$, die nicht zur Menge der <u>zulässigen Lösungen</u>

$$\mathcal{F} = \{(x,y,s) : A^T y + s = c,\ Ax = b,\ x \geq 0,\ s \geq 0\}$$

gehören.

Sei $\mathcal{F}^\circ = \{(x,y,s) : A^T y + s = c,\ Ax = b,\ x > 0,\ s > 0\}$ die Menge der <u>strikt zulässigen Lösungen</u>, $x > 0$, $s > 0$ sind die inneren Punkte des nichtnegativen Orthanten

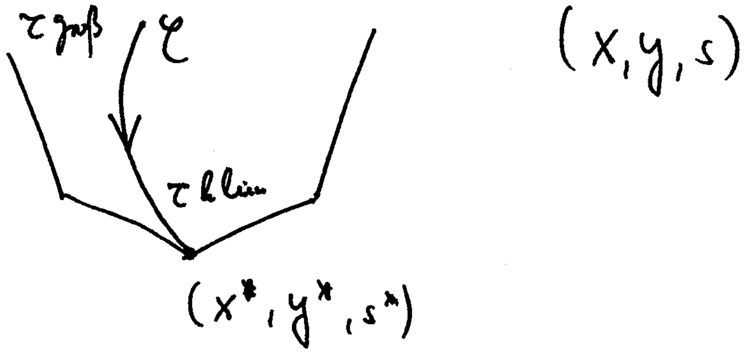
$$\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \{z \in \mathbb{R}^n : z \geq 0\}.$$

Sei $\tau > 0$. Suche ~~F~~ (x_τ, y_τ, s_τ) mit

$$F(x_\tau, y_\tau, s_\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e \end{bmatrix}, \quad x_\tau > 0,\ s_\tau > 0.$$

Wir zeigen gleich, dass $(x_\tau, y_\tau, s_\tau) \in \mathcal{F}^\circ$ existieren und eindeutig bestimmt sind.

Def.: Die Menge $\mathcal{C} = \{(x_\tau, y_\tau, s_\tau) : \tau > 0\}$ heißt der <u>zentrale Pfad</u> von (LP).



Lemma $\lim_{\tau \to 0} c^T x_\tau - b^T y_\tau = 0.$

Bew.:

$$
\begin{aligned}
c^T x_\tau - b^T y_\tau &= (A^T y_\tau + s_\tau)^T x_\tau - b^T y_\tau \\
&= y_\tau^T A x_\tau + s_\tau x_\tau - b^T y_\tau \\
&= y_\tau^T b + n\tau - b^T y_\tau \\
&= n\tau.
\end{aligned}
$$

Theorem Der zentrale Pfad existiert und ist eindeutig:
Falls $\mathcal{F}^\circ \neq \emptyset$ und $\tau > 0$ $\exists!\ (x_\tau, y_\tau, s_\tau)$:

$$F(x_\tau, y_\tau, s_\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e \end{bmatrix}, \quad x_\tau > 0,\ s_\tau > 0.$$

<u>Def.</u>: Definiere

$$H^\circ = \{ (x,s) : \exists y : (x,y,s) \in \mathcal{F}^\circ \}.$$

und die <u>Barrierefunktion</u>

$$f_\tau : H^\circ \to \mathbb{R}$$

$$f_\tau(x,s) = \frac{1}{\tau} x^T s - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i s_i).$$

[Falls $(x,s) \to$ Rand von $H^\circ \Rightarrow f_\tau(x,s) \to +\infty$].

<u>Lemma 1</u> f_τ ist strikt konvex

<u>Bew.</u>:

i) Der Term $x^T s$ ist linear in H°:

Sei $\bar{x}$ mit $A\bar{x} = b$. Dann gilt für $(x,s) \in H^\circ$:

$$\begin{aligned} x^T s &= x^T(c - A^T y) \\ &= x^T c - b^T y \\ &= x^T c - (A\bar{x})^T y \\ &= x^T c - \bar{x}^T A^T y \\ &= x^T c - \bar{x}^T (c - s). \end{aligned}$$

ii) Die Fkt. $t \mapsto -\ln t$ ist strikt konvex.

i) + ii) $\Rightarrow$ Beh.

Lemma 2 $\exists\, C: \; f_\tau(x,s) \geq C \quad \forall (x,s) \in H^\circ.$

Bew.: Aufgabe 13.3

Lemma 3 Für $K \geq 0$ ist die Menge $\{(x,s) \in H^\circ : x^T s \leq K\}$ beschränkt.

Bew.: folgt unmittelbar aus Aufgabe 13.2.

Lemma 4 Sei $K \in \mathbb{R}$. Dann ist die Menge $\{(x,s) \in H^\circ : f_\tau(x,s) \leq K\}$ in einer kompakten Menge enthalten.

Bew.: Für $g(t) = t - \ln t - 1$ ist

$$f_\tau(x,s) = \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{x_i s_i}{\tau}\right) + n - n \log \tau.$$

Dann

$$f_\tau(x,s) \leq K \iff \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{x_i s_i}{\tau}\right) \leq \bar{K} = K - n + n \log \tau.$$

Für Index $i = 1, \dots, n$ ist

$$g\left(\frac{x_i s_i}{\tau}\right) \leq \bar{K} - \sum_{j \neq i} g\left(\frac{x_j s_j}{\tau}\right) \leq \bar{K},$$

weil $g(t) \geq 0$ für $t \geq 0$.

Weil $g(t) \to \infty$ für $t \to 0$ und $t \to \infty$:

$\exists M: \quad \frac{1}{M} \le x_i s_i \le M \quad i = 1, \dots, n.$

Also $x^T s = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i \le nM$. Nach Lemma 3 $\exists M_u$:

$x_i \le M_u, \ s_i \le M_u.$

Also $\frac{1}{M} \le x_i s_i \le M_u s_i \Rightarrow s_i \ge \frac{1}{M M_u}$

Genauso $x_i \ge \frac{1}{M M_u}.$ ⊠

<u>Bew.</u> (des Theorems)

Weil f_τ strikt konvex und $\{(x,s) \in H^\circ : f_\tau(x,s) \le k\}$ kompakt, besitzt f_τ ein eindeutiges Minimum (x^*, s^*).

<u>Beh.</u>: $x^* = x_\tau, \ s^* = s_\tau$.

<u>Bew.</u>: (x^*, s^*) löst das Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min\ & f_\tau(x,s) \\ & Ax = b \\ & A^T y + s = c \\ & x > 0, s > 0. \end{aligned}$$