Insbesondere ist es ein lokales Minimum für

$$\min f_\tau(x,s)$$
$$Ax = b$$
$$A^T y + s = c.$$

Aus der Analysis:

Theorem (Extrema mit Nebenbedingungen / Lagrange-Multiplikatoren)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, seien $f : U \to \mathbb{R}$, $g_1, \dots, g_N : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Falls $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Extremum von $f$ unter den Nebenbedingungen $g_1(x^*) = \dots = g_N(x^*) = 0$ ist, dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ (Multiplikatoren) mit

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, g_i(x^*).$$

Hier: $$\nabla f_\tau(x,s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{\tau} - X^{-1}e \\ 0 \\ \frac{x}{\tau} - S^{-1}e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_\tau(x,s) \\ \frac{\partial}{\partial y} f_\tau(x,s) \\ \frac{\partial}{\partial s} f_\tau(x,s) \end{bmatrix}$$

$$g_1(x,y,s) = [Ax-b]_1, \dots, g_m(x,y,s) = [Ax-b]_m$$
$$g_{m+1}(x,y,s) = [A^T y + s - c]_1, \dots, g_{m+n}(x,y,s) = [A^T y + s - c]_n$$

Also: $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^m,\ \mu \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{(a)} \quad \frac{s}{\tau} - X^{-1}e = A^T\lambda$$

$$\text{(b)} \quad 0 = A\mu$$

$$\text{(c)} \quad \frac{x}{\tau} - S^{-1}e = \mu$$

$$\text{(b), (c)} :\Longrightarrow \quad A\left(\frac{x}{\tau} - S^{-1}e\right) = 0$$

(a) multipliziert mit $\left(\frac{x}{\tau} - S^{-1}e\right)^T$ liefert:

$$\underbrace{\left(\frac{x}{\tau} - S^{-1}e\right)^T A^T\lambda}_{=0} = \underbrace{\left(\frac{x}{\tau} - S^{-1}e\right)^T\left(\frac{s}{\tau} - X^{-1}e\right)}_{\left(\frac{1}{\tau}Xe - S^{-1}e\right)^T\left(\frac{1}{\tau}Se - X^{-1}e\right)}.$$

Definiere $X^{1/2} = \operatorname{diag}(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$. Dann

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{\tau}Xe - S^{-1}e\right)^T\left(X^{-\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}\right)\left(X^{\frac{1}{2}}S^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{\tau}Se - X^{-1}e\right) \\ &= \left\|\frac{1}{\tau}(XS)^{1/2}e - (XS)^{-1/2}e\right\|^2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad XSe = \tau e.$$

$\boxtimes$.

**Def.:** Sei $(x,y,s) \in \mathcal{F}^\circ$. Das **Dualitätsmaß** $\mu$ von $(x,y,s)$ ist

$$\mu = \frac{x^T s}{n} = c^T x - b^T y.$$

**Def.:** Sei $\theta \in [0,1)$. Die **Nachbarschaft** des zentralen Pfads ist $N(\theta) = \{(x,y,s) \in \mathcal{F}^\circ : \|XSe - \mu e\| \leq \theta\mu\}$.

**Lemma** a) $(x,y,s) \in \mathcal{C} \iff (x,y,s) \in N(0)$.

b) $(x,y,s) \in N(\theta) \implies x > 0,\ s > 0$.

**Bew.:** a) klar

b) Falls $x_i = 0$ oder $s_i = 0$. Dann

$\|XSe - \mu e\| \geq |x_i s_i - \mu| = \mu$, aber $\theta < 1$.

## § 2 Der Algorithmus

Betrachte

$$F(x,y,s) = \begin{bmatrix} A^T y + s - c \\ Ax - b \\ XSe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e \end{bmatrix}.$$

Sei $(x,y,s) \in \mathcal{F}^\circ$. Linearisiere $F$ an $(x,y,s)$:

$$F(x,y,s) + \nabla F(\Delta x, \Delta y, \Delta s), \quad \text{wobei}$$

$$\nabla F(\Delta x, \Delta y, \Delta s) = \begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} \quad \text{mit}$$

$(\Delta x, \Delta y, \Delta s) \in \mathbb{R}^{2n+m}$, und $F(x,y,s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ XSe \end{bmatrix}$.

Für den <u>Zentrisierungsparameter</u> $\sigma \in [0,1]$ definiere den <u>modifizierten Newton-Schritt</u> $(\Delta x, \Delta y, \Delta s) \in \mathbb{R}^{2n+m}$ durch die lineare Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -XSe + \sigma\mu e \end{bmatrix}.$$

# Innere - Punkte - Methode

**gegeben:** $\theta = 0{,}4$, $\sigma = 1 - 0{,}4/\sqrt{n}$,
Startpunkt $(x_0, y_0, s_0) \in N(\theta)$,
$N$ = Anzahl der Iterationen

for $k = 0$ to $N-1$:

Bestimme $(\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta s_k)$ durch Lösen des LGS

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S_k & 0 & X_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \\ \Delta s_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -X_k S_k e + \sigma \mu_k e \end{bmatrix}$$

$$(x_{k+1}, y_{k+1}, s_{k+1}) = (x_k, y_k, s_k) + (\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta s_k).$$

**Bild dazu:**