



Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert
Dr. F. von Heymann

Methoden und Probleme der diskreten Mathematik

Wintersemester 2014/2015

— Aufgabenblatt 3 —

Aufgabe 3.1 Sei der Gaußsche q -Binomialkoeffizient definiert als

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = |\{U : U \text{ ist } k\text{-dimensionaler Untervektorraum von } \mathbb{F}_q^n\}|.$$

a) Zeigen Sie:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

b) Warum gilt $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 = \binom{n}{k}$?

Aufgabe 3.2 Seien $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}^2$ Punkte in der Ebene, die nicht alle auf einer gemeinsamen Gerade liegen. Zeigen Sie, dass durch diese Punkte mindestens N verschiedene Geraden $\overline{p_i p_j}$, mit $1 \leq i < j \leq N$, definiert werden.

Aufgabe 3.3 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge mit der Eigenschaft, dass es zwei Zahlen $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der Abstand zwischen je zwei verschiedenen Punkten in A entweder d_1 oder d_2 ist. Finden Sie eine in n polynomielle obere Schranke für $|A|$.

Aufgabe 3.4 Zeigen Sie, dass die chromatische Zahl des \mathbb{R}^n höchstens exponentiell in n wächst.

Abgabe: Bearbeitete Aufgaben bis spätestens Mittwoch, den 29. Oktober 2014 um 23 Uhr 59, in das Onlineformular auf der Vorlesungshomepage eintragen.

— Zitate —

Aus: Freeman Dyson — Birds and Frogs

Some mathematicians are birds, others are frogs. Birds fly high in the air and survey broad vistas of mathematics out to the far horizon. They delight in concepts that unify our thinking and bring together diverse problems from different parts of the landscape. Frogs live in the mud below and see only the flowers that grow nearby. They delight in the details of particular objects, and they solve problems one at a time. I happen to be a frog, but many of my best friends are birds. The main theme of my talk tonight is this. Mathematics needs both birds and frogs. Mathematics is rich and beautiful because birds give it broad visions and frogs give it intricate details. Mathematics is both great art and important science, because it combines generality of concepts with depth of structures. It is stupid to claim that birds are better than frogs because they see farther, or that frogs are better than birds because they see deeper. The world of mathematics is both broad and deep, and we need birds and frogs working together to explore it.