Kapitel I   Extremale endliche Mengen

Sei $[n] = \{1, \dots, n\}$ die Menge der ersten n natürlichen Zahlen.

<u>Grundproblem</u> Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von verschiedenen Teilmengen von $[n]$, d.h. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, die zusätzlich eine bestimmte Eigenschaft erfüllt.

a) Wie groß / klein kann $|\mathcal{F}|$ sein?

b) Wie sehen $\mathcal{F}$ mit max. / min. Kardinalität aus?

<u>Bsp</u>: Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ heißt <u>n-Schnittfamilie</u>, falls

$\forall A, B \in \mathcal{F}: \quad A \cap B \neq \emptyset.$

a) Was ist die größtmögliche Kardinalität einer n-Schnittfamilie

b) Wie sehen extremale $\mathcal{F}$'s aus?

§1 Der Satz von Erdős-Ko-Rado

<u>Historie</u>:
* bewiesen von Paul Erdős, Chao Ko, Richard Rado 1938
* publiziert 1961
* wichtiges Resultat in der extremalen Kombinatorik
* viele verschiedene Beweise / Variationen

Def. 1 Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ heißt **(n, k)-Schnitt-familie**, falls

i) $\forall A \in \mathcal{F}: \quad |A| = k$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{F}: \quad A \cap B \neq \emptyset$.

Satz 2 (Erdös-Ko-Rado)

Sei $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ eine (n,k)-Schnittfamilie, dann gilt

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}, \quad \text{falls } n \geq 2k.$$

Bem.: * Falls $n < 2k$, dann schneiden sich $A, B \in 2^{[n]}$ mit $|A| = |B| = k$ immer.

* Betrachte die Familie

$$\mathcal{F}_0 = \{ A \in 2^{[n]} : |A| = k, \ 1 \in A \}.$$

Dies ist eine (n,k)-Schnittfamilie mit

$$|\mathcal{F}_0| = \binom{n-1}{k-1}.$$

Jetzt: Zwei Beweise von Satz 2. Erster Beweis: Katona (1972), Zweiter Beweis: Lovász (1979).

Lemma 3 Sei $n \geq 2k$. Betrachte die Mengen

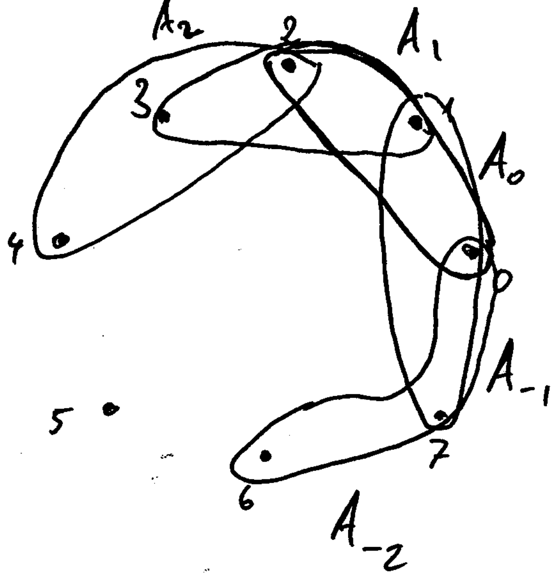
$$A_i = \{ i, i+1, \dots, i+k-1 \} \subseteq \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \quad i \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$$

Sei $\mathcal{G} \subseteq \{ A_0, \dots, A_{n-1} \}$, so dass $\forall A, B \in \mathcal{G} : A \cap B \neq \emptyset$.

Dann gilt $|\mathcal{G}| \leq k$.

$n = 8$

$k = 3$



Bew.: o.B.d.A. $A_0 \in \mathcal{G}$. Die Mengen, die A_0 schneiden sind $A_{-1}, A_{-2}, \dots, A_{-(k-1)}, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$. Falls $A_{-j} \in \mathcal{G}$, dann $A_{k-j} \notin \mathcal{G}$, und umgekehrt.

Also $|\mathcal{G}| \leq k$.

Bew.: (Satz 2; Katona)

Sei $\mathcal{F}$ eine (n,k)-Schnittfamilie. Wähle eine zufällige Permutation $\pi : \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.

Fasse $A \in \mathcal{F}$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auf und betrachte $\pi(A) \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Definiere die Zufallsvariable

$$X = |\{A \in \mathcal{F} : \pi(A) = A_i, \ i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}|.$$

Dann gilt einerseits (Lemma 3)

$$\mathbb{E}[X] \leq k$$

und andererseits

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{A \in \mathcal{F}} \Pr[\pi(A) = A_i \text{ für ein } i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$$

$$= \sum_{A \in \mathcal{F}} n \frac{k!\,(n-k)!}{n!} = \frac{n}{\binom{n}{k}} |\mathcal{F}|.$$

Also

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}. \qquad \boxtimes$$

Def. 4 Sei $n \geq 2k$. Definiere den Knesergraph $K(n,k)$ durch

$$V = \{ A \in 2^{[n]} : |A| = k \}$$

$$E = \{ \{A,B\} : A, B \in V, \ A \cap B = \emptyset \}.$$

Unabhängige Mengen in $K(n,k)$ entsprechen genau den (n,k)-Schnittfamilien. Ziel: Bestimme $\alpha(K(n,k))$.

Satz 5 Sei $G = (V,E)$ ein r-regulärer Graph, d.h. $\forall v \in V : |\{e \in E : v \in e\}| = r$. Sei $A \in \mathbb{R}^{V \times V}$ die Adjazenzmatrix von G, d.h.

$$A_{v,w} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{v,w\} \in E \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und sei λ_{min} der kleinste Eigenwert von A. Dann gilt

$$\alpha(G) \leq \frac{-|V| \lambda_{min}}{r - \lambda_{min}}.$$

[NLO: siehe Aufgabe 10.2].

Bew.: Sei $I \subseteq V$ eine unabhängige Menge in G, $I \neq \emptyset$. Betrachte charakteristischen Vektor $\mathbb{1}_I \in \mathbb{R}^V$.