

Zerlege 1_I orthogonal als

$$1_I = \beta 1_V + g \quad \text{mit } g \in \mathbb{R}^V, \quad g^T 1_V = 0.$$

Dann gilt

$$|I| = 1_I^T 1_V = \beta |V|$$

$$|I| = 1_I^T 1_I = \beta^2 |V| + \|g\|^2.$$

Weil I unabhängig, ist

$$\begin{aligned} 0 &= 1_I^T A 1_I = (\beta 1_V + g)^T A (\beta 1_V + g) \\ &= \underbrace{\beta^2 1_V^T A 1_V}_{(1)} + \underbrace{2\beta 1_V^T A g}_{(2)} + \underbrace{g^T A g}_{(3)} \end{aligned}$$

(1) = $\beta^2 \tau |V|$, weil 1_V Eigenvektor von A mit Eigenwert τ

(2) = 0, weil 1_V E.V. von A & $g^T 1_V = 0$.

(3) $\geq \lambda_{\min} \|g\|^2$, weil $\lambda_{\min} = \min_{f \in \mathbb{R}^V, \|f\|=1} \frac{f^T A f}{f^T f}$.

Zusammen

$$0 \geq \beta^2 \tau |V| + \lambda_{\min} (\beta |V| - \beta^2 |V|)$$

und

$$\beta \leq \frac{-\lambda_{\min}}{\tau - \lambda_{\min}} \Rightarrow |I| \leq \frac{-|V| \lambda_{\min}}{\tau - \lambda_{\min}}.$$

□

Bew. (Satz 2, Lovász)

$K(n, k)$ ist $r = \binom{n-k}{k}$ -regulär: klar.

Beh.: $\lambda_{\min} = -\binom{n-k-1}{k-1}$

Bew.: Berechne alle Eigenwerte der Adjazenzmatrix A von $K(n, k)$.

Sei $1 \leq t \leq k$. Definiere

$$\binom{[n]}{t} = \{A \in 2^{[n]} : |A| = t\}$$

und die linearen Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^{\binom{[n]}{t}} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{[n]}{t-1}}$$

$$(f(x))_S = \sum_{\substack{T \in \binom{[n]}{t} \\ S \subseteq T}} x_T, \quad \text{wobei } S \in \binom{[n]}{t-1}$$

und

$$g: \ker f \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{[n]}{k}}$$

$$(g(x))_U = \sum_{\substack{T \in \binom{[n]}{t} \\ T \subseteq U}} x_T, \quad \text{wobei } U \in \binom{[n]}{k}.$$

- Beh.:
- a) f ist surjektiv, d.h. $\dim \ker f = \binom{n}{t} - \binom{n}{t-1}$.
 - b) g ist injektiv.
 - c) $g(\ker f) \subseteq \text{Eig}(A, (-1)^t \binom{n-k-t}{k-t})$.

Bew.: a), b) $\rightarrow$ Aufgaben, c) gleich.

Für verschiedene t sind die zugehörigen Eigenwerte verschieden. Nun ist

$$\sum_{t=0}^k \dim \left(\text{Eig} \left(A, (-1)^t \binom{n-k-t}{k-t} \right) \right)$$

$$\stackrel{a)-c)}{\geq} 1 + \sum_{t=1}^k \left(\binom{n}{t} - \binom{n}{t-1} \right) = \binom{n}{k} = \dim \mathbb{R}^{\binom{n}{k}},$$

also $\dim \text{Eig} \left(A, (-1)^t \binom{n-k-t}{k-t} \right) = \binom{n}{t} - \binom{n}{t-1}$. D.h.

Wir haben alle Eigenwerte von A bestimmt und bei $t=1$ ist $(-1) \binom{n-k-1}{k-1}$ der kleinste. Damit nach Satz 5

$$\alpha(K(n, k)) \leq \frac{-(-1) \binom{n-k-1}{k-1} \binom{n}{k}}{\underbrace{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}}_{\binom{n-k-1}{k-1} \left(\frac{n-k}{k} + 1 \right)}} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Fehlt noch: Beweis von c)

Sei $x \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{t}}$, $x \neq 0$, mit $x \in \ker f$. Es ist

$g(x)$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $(-1)^t \binom{n-k-t}{k-t}$,

Weil:

$$\begin{aligned} [A g(x)]_V &= \sum_{\substack{U \in \binom{[n]}{k} \\ U \cap V = \emptyset}} g(x)_U = \sum_{\substack{U \in \binom{[n]}{k} \\ U \cap V = \emptyset}} \sum_{\substack{T \in \binom{[n]}{t} \\ T \subseteq U}} x_T \\ &= \sum_{\substack{T \in \binom{[n]}{t} \\ T \cap V = \emptyset}} \binom{n-k-t}{k-t} x_T = \binom{n-k-t}{k-t} \underbrace{\sum_{\substack{T \in \binom{[n]}{t} \\ T \cap V = \emptyset}} x_T}_{=\beta_0}. \end{aligned}$$

Definiere $\beta_i = \sum_{\substack{T \in \binom{[n]}{t} \\ |T \cap V| = i}} x_T$.

Da $x \in \ker f$, d. h. $\sum_{\substack{T \in \binom{[n]}{t} \\ S \subseteq T}} x_T = 0$ für alle $S \in \binom{[n]}{t-1}$

gilt

$$0 = \sum_{\substack{S \in \binom{[n]}{t-1} \\ |S \cap V| = i}} \sum_{\substack{T \in \binom{[n]}{t} \\ S \subseteq T}} x_T = (i+1) \beta_{i+1} + (t-i) \beta_i. \quad (*)$$

Aus (*) folgt $\beta_i = (-1)^i \binom{t}{i} \beta_0$. D.h. $\beta_0 = (-1)^t \beta_t$

und weiter

$$\beta_0 = (-1)^t \sum_{\substack{T \in \binom{[n]}{t} \\ |T \cap V| = t}} x_T = (-1)^t \sum_{\substack{T \in \binom{[n]}{t} \\ T \subseteq V}} \overbrace{x_T}^{g(x)_V}.$$

□

Bem.: a) Der Beweis von Lovász zeigt sogar, dass die Shannon-Kapazität ($\rightarrow$ Vorlesung NLo) von $K(n, k)$ gleich $\binom{n-1}{k-1}$ ist.

b) Die Beweismethode von Lovász ist sehr vielseitig einsetzbar ($\rightarrow$ Kapitel I.2, I.3).

§ 2 Variation: (n, k, t) -Schnittfamilien

Def. 1. Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ heißt (n, k, t) -Schnittfamilie, falls

i) $\forall A \in \mathcal{F}: |A| = k$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{F}: |A \cap B| \geq t$.

$(n, k, 1)$ -Schnittfamilien sind (n, k) -Schnittfamilien.