

Annahme $n > 2k - t$

Falls $n \leq 2k - t$, dann ist $\forall A, B \in \binom{[n]}{k}$ immer
 $|A \cap B| \geq t$.

Konstruktion von (n, k, t) -Schnittfamilien

Def. 2 Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ heißt t -fixiert,
falls es eine Menge T mit $|T| = t$ gibt, so dass
 $T \subseteq A$ für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt.

Bsp.: $\mathcal{F}_0 = \left\{ A \in \binom{[n]}{k} : \{1, \dots, t\} \subseteq A \right\}$ mit
 $|\mathcal{F}_0| = \binom{n-t}{k-t}$.

Klar: t -fixierte Familien sind (n, k, t) -Schnitt-
familien.

Frage: Ist jede (n, k, t) -Schnittfamilie mit
maximaler Kardinalität eine t -fixierte Familie
mit Kardinalität $\binom{n-t}{k-t}$?

Antwort: Ja, aber...

Für $0 \leq r \leq k-t$ definiere

$$\mathcal{F}_r = \{ A \in \binom{[n]}{k} : |A \cap \{1, \dots, t+2r\}| \geq t+r \}.$$

Dann ist für $A, B \in \mathcal{F}_r$:

$$\begin{aligned} |A \cap B| &\geq |(A \cap \{1, \dots, t+2r\}) \cap (B \cap \{1, \dots, t+2r\})| \\ &\geq (t+r) + (t+r) - (t+2r) = t, \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{F}_r$ ist (n, k, t) -Schnittfamilie, wobei

$$|\mathcal{F}_r| = \sum_{s=t+r}^k \binom{t+2r}{s} \binom{n-t-2r}{k-s}.$$

Dabei ist z.B. für $n=8, k=5, t=3$:

$$|\mathcal{F}_0| = 10, \quad |\mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_2| = 21.$$

Vermutung (Frankl, 1978)

Sei $\mathcal{F}$ (n, k, t) -Schnittfamilie, dann

$$|\mathcal{F}| \leq \max_{0 \leq r \leq k-t} |\mathcal{F}_r|.$$

Beobachtung ($\rightarrow$ Aufgabe)

Fall $n \geq (k-t+1)(t+1)$, dann $|\tilde{F}_r| \leq |\tilde{F}_0| \quad \forall r$.

Theorem (Wilson, 1984)

Für $n \geq (k-t+1)(t+1)$ gilt für jede (n, k, t) -Schnittfamilie $\tilde{F}$: $|\tilde{F}| \leq |\tilde{F}_0| = \binom{n-t}{k-t}$.

Bew.: $\rightarrow$ Erweiterung der Strategie von Lovász

Theorem (Ahlsvede; Khachatrian, 1997, "the complete intersection theorem")

Die Vermutung von Frankl stimmt.

Wir beweisen hier "nur":

Satz 3 Für $1 \leq t \leq k$ gibt es eine Konstante $C(k, t)$, so dass für $n \geq C(k, t)$ gilt: Jede (n, k, t) -Schnittfamilie $\tilde{F}$ hat Kardinalität höchstens $|\tilde{F}_0|$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\tilde{F}$ t -fixiert ist.

Bew.: Angenommen $\mathcal{F}$ ist nicht t -fixiert. Können o.B.d.A annehmen, dass es $A, B \in \mathcal{F}$ gibt, mit $|A \cap B| = t$ ($\rightarrow$ Aufgabe). Da $\mathcal{F}$ nicht t -fixiert, gibt es $C \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B \not\subseteq C$. Für jedes $D \in \mathcal{F}$ gilt $|D \cap (A \cup B \cup C)| \geq t+1$. Also

$|D \cap ([n] \setminus (A \cup B \cup C))| \leq k-t-1$, und weiter

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{|A \cup B \cup C|} \sum_{i=0}^{k-t-1} \binom{n}{i} \leq 2^{3k} (k-t) n^{k-t-1} \\ \leq C_1(k, t) n^{k-t-1}.$$

Andererseits für t -fixierte Familie $\mathcal{F}_0$

$$|\mathcal{F}_0| = \binom{n-t}{k-t} > \frac{(n-k)^{k-t}}{(k-t)!} \geq C_2(k, t) n^{k-t}.$$

Zusammen: Falls $n \geq \frac{C_1(k, t)}{C_2(k, t)} = C(k, t)$ ist,

folgt $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0|$. □

Wie gesagt: Die Abschätzung von $|\mathcal{F}|$ ist sehr grob.