

§ 3 Mehr Variationen: Andere Strukturen

1. Erdős - Ko - Rado für $\mathbb{F}_q$ -Vektorräume

Sei q eine Primzahlpotenz. Sei $\mathbb{F}_q$ der entsprechende endliche Körper mit q Elementen.

Def. 1 Eine Familie $\mathcal{F}$ von k -dimensionalen Untervektorräumen von $\mathbb{F}_q^n$ heißt (q, n, k, t) -Schnittfamilie, falls

$$\forall A, B \in \mathcal{F} : \dim(A \cap B) \geq t.$$

Sei $\text{span}\{e_1, \dots, e_t\} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ der t -dim. Untervektorraum von $\mathbb{F}_q^n$, der von den ersten t Standardbasisvektoren erzeugt wird.

Definiere die t -fixierte Familie

$$\mathcal{F}_0 = \{ A : A \subseteq \mathbb{F}_q^n \text{ } k\text{-dim. UVR, } e_1, \dots, e_t \in A \}.$$

Dann ist $|\mathcal{F}_0| = \begin{bmatrix} n-t \\ k-t \end{bmatrix}_q$, wobei:

Def. 2 Der Gaußsche Binomialkoeffizient ist def. als

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= |\{ U : U \subseteq \mathbb{F}_q^n, \text{ } k\text{-dim. UVR von } \mathbb{F}_q^n \}| \\ &= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdots (q - 1)} \end{aligned}$$

Es gilt $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_1 = \binom{n}{k}$, wenn man $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q$ als Polynom in q betrachtet.

Satz 3 (Frankl-Wilson 1986)

Falls $n \geq 2k$, dann gilt für eine (q, n, k, t) -Schnittfamilie $\mathcal{F}$: $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0| = \left[\begin{smallmatrix} n-t \\ k-t \end{smallmatrix} \right]_q$.

Bew.: $\rightarrow$ Variante von Lovász Beweis.

2. Erdős-Ko-Rado für Permutationen

Sei $S_n = \{ \sigma : [n] \rightarrow [n] : \sigma \text{ bijektiv} \}$ die Gruppe der Permutationen.

Def. 4 Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq S_n$ heißt (n, t) -Schnittfamilie von Permutationen, wenn

$$\forall \sigma, \tau \in \mathcal{F} \quad \exists i_1, \dots, i_t \in [n] : \sigma(i_k) = \tau(i_k), \quad k=1, \dots, t.$$

Satz 5 (Ellis, Friedgut, Pilpel, 2011)

Für $t \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C(t)$, so dass für alle $n \geq C(t)$ gilt: Sei $\mathcal{F}$ eine (n, t) -Schnittfamilie

von Permutationen, dann ist

$$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0| = (n-t)!,$$

wobei $\mathcal{F}_0 = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = 1, \dots, \sigma(t) = t\}$.

Bew.: $\rightarrow$ Variante von Lovász Beweis.

Bem.: Optimales (minimalen) $C(t)$ ist nicht bekannt.

3. Weitere

$GL_n(\mathbb{F}_q)$ (neue Vermutung); Δ -Schnittfamilien von Graphen.
($\rightarrow$ 3. Teil der Vorlesung).

§ 4 Vorgegebene Schnittmuster

Satz 1 Sei $t \geq 1$. Sei $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ eine n -Schnittfamilie,
so dass $\forall A, B \in \mathcal{F} : |A \cap B| = t$, für $A \neq B$.

Dann $|\mathcal{F}| \leq n$.

Bew.: Wir können annehmen, dass $\forall A \in \mathcal{F} : |A| \geq t+1$.

Denn sonst enthält jeder $B \in \mathcal{F}$ die Menge A und

$$|\mathcal{F}| \leq 1 + n - t.$$

Betrachte die Incidenzvektoren $1_A \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{F}$.

Beh.: 1_A , $A \in \mathcal{F}$, sind linear unabhängig ($\Rightarrow$ Satz 1)

Bew.: Sei $\lambda_A \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A 1_A = 0$. Dann

$$0 = \left(\sum_A \lambda_A 1_A \right)^T \left(\sum_A \lambda_A 1_A \right)$$

$$= \sum_{A, B \in \mathcal{F}} \lambda_A \lambda_B 1_A^T 1_B$$

$$= \sum_A \lambda_A^2 |A| + \sum_{\substack{A, B \\ A \neq B}} \lambda_A \lambda_B t$$

$$\geq \sum_A \lambda_A^2 (t+1) + \sum_{\substack{A, B \\ A \neq B}} \lambda_A \lambda_B t$$

$$= t \left(\sum_A \lambda_A \right)^2 + \sum_A \lambda_A^2$$

$$\Rightarrow \sum_A \lambda_A^2 = 0 \Rightarrow \lambda_A = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \text{Beh.}$$

□

Frage Wann gilt $|\mathcal{F}| = m$?

Satz 2 (Frankel, Wilson, 1981)

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Sei $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ eine Familie mit den folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad \forall A \in \mathcal{F}: \quad |A| = 2p-1$$

$$(ii) \quad \forall A, B \in \mathcal{F}, A \neq B: \quad |A \cap B| \neq p-1.$$

Dann gilt

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{p-1}.$$

Bew.: Für $A \in \mathcal{F}$ betrachte den charakteristischen Vektor $1_A \in \mathbb{R}^n$ und das Polynom

$$f_A(x) = \prod_{s=0}^{p-2} \left(\left(\sum_{i \in A} x_i \right) - s \right) \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n],$$

wobei modulo p gerechnet wird. Dann ist

$$f_A(1_B) = \prod_{s=0}^{p-2} (|A \cap B| - s) \pmod{p}.$$

$$\text{und } f_A(1_B) \neq 0 \Leftrightarrow |A \cap B| = p-1 \pmod{p}.$$

Falls $A=B$, dann ist $|A \cap A| = 2p-1 = p-1 \pmod{p}$.

$$\text{Also } \boxed{f_A(1_A) \neq 0.}$$

Fall $A \neq B$, dann ist $|A \cap B| \leq 2p - 2$. Also

$|A \cap B| \neq p - 1 \pmod{p}$, nach (ii). D.h.

$$\boxed{f_A(1_B) = 0 \text{ für } A \neq B}$$