

Fall $A \neq B$, dann ist $|A \cap B| \leq 2p-2$. Also

$|A \cap B| \neq p-1 \pmod{p}$, nach (ii). D.h.

$$\boxed{f_A(1_B) = 0 \text{ für } A \neq B}$$

Man kann f_A auch als Fkt. $f_A: \{0,1\}^n \rightarrow \mathbb{F}_p$ auffassen. Betrachte dann den Vektorraum über $\mathbb{F}_p$

$$V_{\mathcal{F}} = \text{span}\{f_A : A \in \mathcal{F}\}.$$

Beh.: $|\mathcal{F}| = \dim V_{\mathcal{F}}$.

Bew.: Zeige: $f_A, A \in \mathcal{F}$, sind linear unabh. Seien $\lambda_A \in \mathbb{F}_p$

mit $\sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A f_A = 0$. Dann ist für $B \in \mathcal{F}$:

$$0 = \sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A f_A(1_B) = \lambda_B f_B(1_B) \Rightarrow \lambda_B = 0.$$

Beh.: $\dim V_{\mathcal{F}} \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{p-1}$.

Bew.: Die Polynome f_A haben $\text{grad} \leq p-1$. Als Fkt.

$f_A: \{0,1\}^n \rightarrow \mathbb{F}_p$ betrachtet können wir annehmen, dass jeder Monom $x_i^{i_j}$ das in f_A vorkommt, nur Exponent $i_j = 0, 1$ hat, da x_i und x_i^2 die gleiche Funktion darstellen.

Abzählen aller Monome $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ mit $i_j = 0, 1$ liefert

$$\dim V_{\mathbb{F}} \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{p-1}.$$

□

§ 5 Geometrische Anwendungen

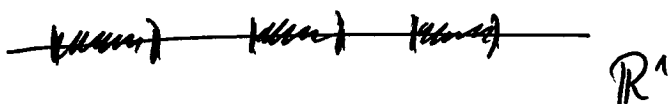
1. Die chromatische Zahl von $\mathbb{R}^n$

Def. 1 $\chi(\mathbb{R}^n) = \min \{ k \in \mathbb{N} : \exists \text{ Partition } \mathbb{R}^n = X_1 \cup \dots \cup X_k$
 $\forall i \in [k] \forall x, y \in X_i : \|x - y\| \neq 1 \}$

ist die chromatische Zahl von $\mathbb{R}^n$.

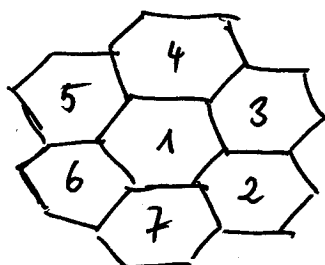
Dies ist die chromatische Zahl des unendlichen Graph
 $G = (V, E)$ mit $V = \mathbb{R}^n$, $E = \{ \{x, y\} : \|x - y\| = 1 \}$.

$\chi(\mathbb{R}^n)$ ist nur für $n=1$ bekannt, $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$:



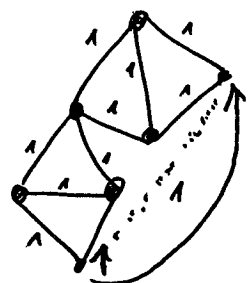
Für $n=2$: $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$

$$\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$$



$$\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$$

Moser-Graph



Vermutung (Erdős): $\chi(\mathbb{R}^n)$ wächst exponentiell in n

Satz 2 (Frankl-Wilson, 1981)

Die Vermutung von Erdős stimmt.

Lemma 3 Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$
und $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \|x - y\| = d$. Dann gilt

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}.$$

Bew.: klar.

Lemma 4 (= Korollar zu Satz 1)

Sei $n = 4p$ und $\mathcal{F} \subseteq \binom{[4p]}{2p-1}$ eine Familie mit

$\forall A, B \in \mathcal{F}, A \neq B: |A \cap B| \neq p-1$. Dann

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{4p}{2p-1}} \leq (0,91)^n.$$

Bew.: Satz 1: $|\mathcal{F}| \leq \binom{4p}{p-1} + \binom{4p}{p-2} + \dots + \binom{4p}{0}$

[Man könnte die rechte Seite mit der Stirlingformel abschätzen; man kann aber auch fast ohne Analysis arbeiten].

Es ist $\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n-k+1} \binom{n}{k}$ und für $n \geq 4k$:

$$\binom{n}{k-1} \leq \frac{1}{3} \binom{n}{k}. \text{ Also:}$$

$$\begin{aligned} \binom{4p}{p-1} + \binom{4p}{p-2} + \dots + \binom{4p}{0} &\leq \binom{4p}{p} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \binom{4p}{p}. \end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{aligned} \frac{|\tilde{F}|}{\binom{4p}{2p-1}} &\leq \frac{1}{2} \frac{\binom{4p}{p}}{\binom{4p}{2p-1}} = \frac{1}{2} \frac{(4p)!}{p! (4p-p)!} \frac{(2p-1)! (4p-2p+1)!}{(4p)!} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2p-1)(2p-2) \dots (p+1)}{(3p)(3p-1) \dots (2p+2)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{p-1} \\ &\leq \left(\frac{2}{3} \right)^p = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{n}{4}} \leq (0,91)^n. \quad \square \end{aligned}$$

Bew. (Satz 2)

Sei p eine Primzahl. Betrachte den Graph $G = (V, E)$

mit $V = \{x \in \{0,1\}^{4p} : \|x\|^2 = 2p-1\}$

$$E = \{\{x,y\} : \|x-y\|^2 = d\}$$

mit $d = (2p-1) - 2(p-1) + (2p-1) = 2p.$