Wir identifizieren Vektoren $x \in \{0,1\}^{4p}$ mit $\|x\|^2 = 2p-1$ mit Teilmengen $X \in \binom{[4p]}{2p-1}$. Dann ist

$$x^T y = |X \cap Y|.$$

Somit entsprechen unabhängige Mengen in G genau den Familien $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ aus dem Satz 4.2 von Frankl-Wilson. Also nach Lemma 3 und 4:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)} = \frac{\binom{4p}{2p-1}}{|\mathcal{F}|_{max}} \geq (0{,}91)^{-n}$$
$$\geq (1{,}09)^n.$$

$\boxtimes$

2. Die Vermutung von Borsuk

Def. 5 Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Durchmesser von X ist

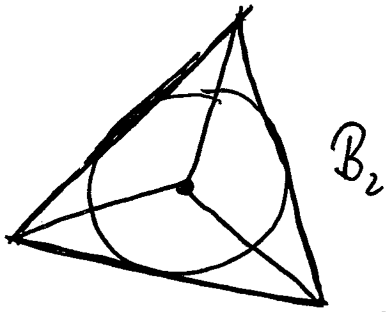
$$\operatorname{diam} X = \sup\{\|x-y\| : x, y \in X\}.$$

Frage (Borsuk) Kann man X in $X_1, \dots, X_{n+1}$ partitionieren, so dass $\operatorname{diam} X_i < \operatorname{diam} X$ für $i = 1, \dots, n+1$ ist.

Bem.: * n anstatt $n+1$ funktioniert nicht:

X = Eckpunkte eines regulären n-Simplex

* Falls $X = B_n$ die Einheitskugel, dann ist die Antwort „ja".



[aber n anstatt $n+1$ funktioniert hier auch nicht $\rightarrow$ Annas Vorlesungen]

Satz 6 (Kahn, Kalai, 1993)
Die Antwort auf die Frage von Borsuk ist im allg. "Nein.": Es gibt ein $X \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass jede Partition $X_1, \dots, X_m$ von X mit $\operatorname{diam} X_i < \operatorname{diam} X$, $i = 1, \dots, m$, wenigstens exponentiell viele Teilmengen benötigt.

Tensorprodukte

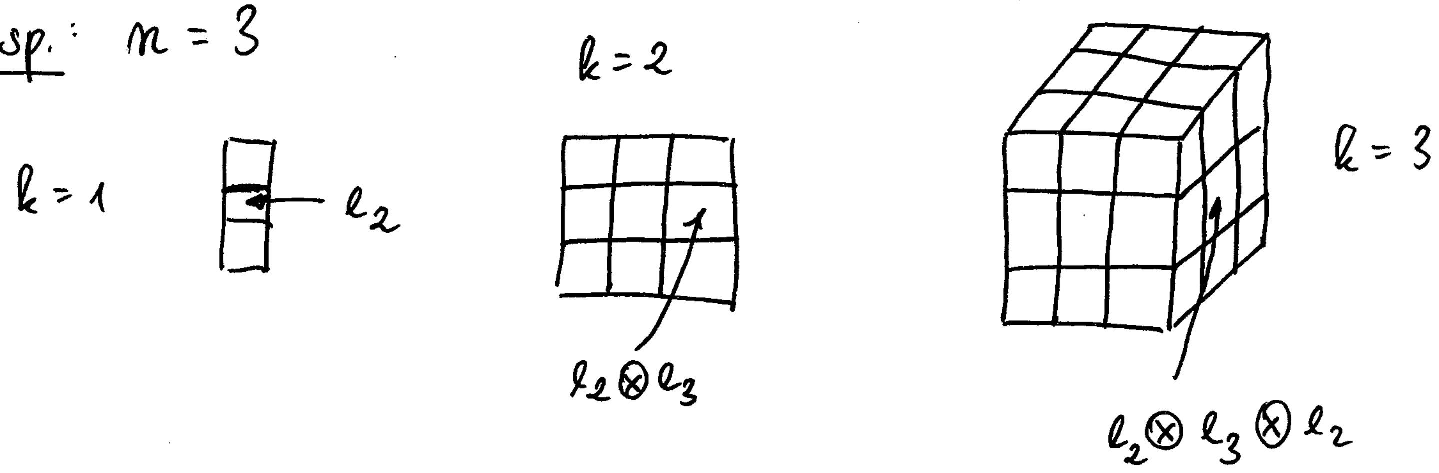
Betrachte den n-dim. euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt $x^T y$ und Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$.

Def. 7 Das *k-fache Tensorprodukt* $(\mathbb{R}^n)^{\otimes k}$ ist der

n^k - dim. eukl. VR mit ONB $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$ mit Skalarprodukt

$$(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k})^T (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}) = \prod_{r=1}^{k} e_{i_r}^T e_{i_r}$$

Bsp.: $n = 3$



Sei $v \in \mathbb{R}^n$ durch $v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$ gegeben. Dann ist $v^{\otimes k} \in (\mathbb{R}^n)^{\otimes k}$ definiert als

$$v^{\otimes k} = (v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) \otimes \cdots \otimes (v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) \underset{\text{ausrechnen}}{\overset{\text{distributiv}}{=}} \sum_{i_1, \dots, i_k} v_{i_1} \cdots v_{i_k} \, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}.$$

Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $(v^{\otimes k})^T (w^{\otimes k}) = (v^T w)^k$.

Bew. (Satz 6)

Sei p eine Primzahl und $n = 4p$. Sei
$\mathcal{A} = \{ A \in 2^{[n]} : |A| = 2p - 1 \}$.

Für $A \in \mathcal{A}$ definiere

$$\mu_A \in \mathbb{R}^n \quad \text{durch} \quad \mu_{A,i} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in A \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Betrachte die Tensorprodukte $\mu_A^{\otimes 2} \in (\mathbb{R}^n)^{\otimes 2}$.

Dann ist

$$\| \mu_A^{\otimes 2} - \mu_B^{\otimes 2} \|^2 = \|\mu_A^{\otimes 2}\|^2 + \|\mu_B^{\otimes 2}\|^2 - 2 (\mu_A^{\otimes 2})^T \mu_B^{\otimes 2}.$$

Also

$$\|\mu_A^{\otimes 2}\|^2 = (\mu_A^{\otimes 2})^T \mu_A^{\otimes 2} = (\mu_A^T \mu_A)^2 = n^2 = \|\mu_B^{\otimes 2}\|^2,$$

und für A, B mit $|A \cap B| = s$

$$\begin{aligned}
(\mu_A^{\otimes 2})^T \mu_B^{\otimes 2} &= (\mu_A^T \mu_B)^2 \\
&= (4p - 2(2p-1-s) - s - 2(2p-1-s) + s)^2 \\
&= (4(1+s-p))^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

und $(\mu_A^{\otimes 2})^T \mu_B^{\otimes 2} = 0$ genau dann, wenn $|A \cap B| = p-1$.

D.h. der Abstand zwischen $\mu_A^{\otimes 2}$ und $\mu_B^{\otimes 2}$ wird am größten, wenn $|A \cap B| = p-1$.

Aus Lemma 4 folgt nun: Falls $\mathcal{A}$ in weniger als $1{,}09^n$ Teilmengen partitioniert wird, dann „gibt" es in einer dieser Teilmengen Vektoren $\mu_A^{\otimes 2}$, $\mu_B^{\otimes 2}$ mit

$$\|\mu_A^{\otimes 2} - \mu_B^{\otimes 2}\| = \operatorname{diam}\{\mu_A^{\otimes 2} : A \in \mathcal{A}\}.$$

Wähle nun n so groß, dass $1{,}09^n > n^2 + 1$. $\boxtimes$

Die kleinste Dimension n^2 mit $1{,}09^n > n^2+1$ und $n = 4p$ ist $n^2 = 13456$.

Was ist die kleinste bekannte Dimension, in der Borsuks Vermutung falsch ist?

* Sie ist für $n = 2, 3$ richtig (Eggleston 1955)
* Sie ist für $n = 65$ falsch (Bondarenko, Mai 2013)

— " — $n = 64$ falsch (Jenrich, August 2013)