

Notation:

$$L_p(t) = \text{const} \left( \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)z^t} \right)$$

Bem: Mit ein paar Tricks lässt sich dieser Term explizit bestimmen:

Popoviciu 1953: Sei  $b^{-1} \in \mathbb{Z}$  so dass  $b^{-1}b = 1 \bmod a$  und  $a^{-1} \in \mathbb{Z}$  so dass  $a^{-1}a = 1 \bmod b$ . Dann ist

$$L_p(t) = \frac{t}{a \cdot b} - \left\{ \frac{b^{-1}t}{a} \right\} - \left\{ \frac{a^{-1}t}{b} \right\} + 1$$

(wobei für  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ )

### 3. Simplex

Fixiere für diesen Abschnitt den Standard- $n$ -Simplex als

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{conv} \{e_1, \dots, e_n, 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

Dann ist  $t \cdot \Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq t \right\}$

und somit

$L_\Delta(t)$  = Anzahl der ganzzahligen nicht-neg. Lösungen  $(m_1, \dots, m_n)$  zu  
 $m_1 + \dots + m_n \leq t$ .

Da für  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $t \geq 0$  und

$(t - (m_1 + \dots + m_n)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ist, können wir

eine Spielraumvariable anfügen und bekommen

$L_{\Delta}(t)$  = Anzahl der ganzzahligen nicht-neg. Lösungen

$$(m_1, \dots, m_{n+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} \text{ zu}$$

$$m_1 + \dots + m_{n+1} = t.$$

Betrachte wieder erzeugende Funktionen:

$$L_{\Delta}(t) = \text{const} \left( \left( \sum_{m_1 \geq 0} z^{m_1} \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_{m_{n+1} \geq 0} z^{m_{n+1}} \right) \cdot z^{-t} \right)$$

$$= \text{const} \left( \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \cdot z^t \right)$$

Beh:  $\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k$

Bew: Aufgabe 4.3

Dann gilt:

$$L_{\Delta}(t) = \text{const} \left( z^t \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k \right)$$

$$= \binom{n+t}{n}.$$

Gitterpunkte im Inneren von  $\Delta$ :

$$t \cdot \Delta^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, x_1 + \dots + x_n < t\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_{\Delta^\circ}(t) &= \left| \left\{ m \in \mathbb{Z}_{>0}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} m_i = t \right\} \right| \\ &= \text{const} \left( \left( \sum_{m_1 > 0} z^{m_1} \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_{m_{n+1} > 0} z^{m_{n+1}} \right) \cdot z^{-t} \right) \\ &= \text{const} \left( \left( \frac{z}{1-z} \right)^{n+1} \cdot z^{-t} \right) \\ &= \text{const} \left( z^{n+1-t} \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k \right) \\ &= \binom{n - (n+1-t)}{n} = \binom{t-1}{n}, \quad \text{wobei} \end{aligned}$$

wir den Binomialkoeffizienten allgemeiner  
definieren als

$$\binom{m}{k} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{k!}$$

für  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  und  $m \in \mathbb{R}$ .

Bem: Es ist nicht schwer zu zeigen dass

$$L_{\Delta^\circ}(t) = \binom{t-1}{n} = (-1)^n \binom{n-t}{n} = (-1)^n L_{\Delta}(t-t)$$

### §3 Der Satz von Pick

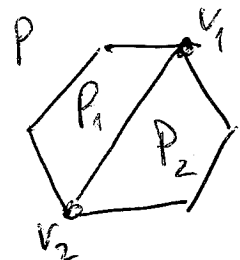
Satz 1: (Pick 1899) Sei  $P$  ein ganzzahliges Polytop in  $\mathbb{R}^2$  mit Fläche  $A$ , inneren Gitterpunkten  $I = |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2|$  und Randpunkten  $B = |P \cap \mathbb{Z}^2| - I$ . Dann gilt

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1.$$

Bew: Damit ist die Anzahl der Gitterpunkte in einem Polytop in der Ebene komplett bestimmt durch seine Fläche und die Gitterpunkte auf dem Rand:  $I + B = A + \frac{1}{2}B + 1$ .  
Dies ist in höheren Dimensionen nicht der Fall.

Bew: (Satz 1) Reduktion auf Dreiecke:

Sei  $P$  kein Dreieck und seien  $v_1, v_2$  nicht benachbarte Ecken von  $P$ . Wenn wir  $P$  "zerschneiden" durch eine neue Kante zwischen  $v_1$  und  $v_2$ , so erhalten wir  $P_1, P_2$  mit jeweils weniger Ecken.



Bezeichne die Fläche, Anzahl der inneren Gitterpunkte und Anz. der Gitterpunkte auf dem Rand von  $P_k$  mit  $A_k, I_k$  und  $B_k$ , resp., für  $k=1,2$ .

Ang. wir können zeigen dass Satz 1 für  $P_1, P_2$  gilt.

Es ist  $A = A_1 + A_2$ . Sei  $L$  die Anzahl der Gitterpunkte auf der Kante zwischen  $v_1$  und  $v_2$ .

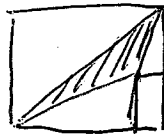
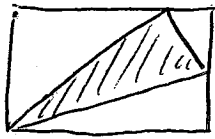
$$\text{Dann ist } I = I_1 + I_2 + L - 2 \quad \text{und} \\ B = B_1 + B_2 - 2L + 2.$$

$$\text{Also: } I + \frac{1}{2}B - 1 = I_1 + I_2 + L - 2 + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 - L + 1 - 1 \\ = I_1 + \frac{1}{2}B_1 - 1 + I_2 + \frac{1}{2}B_2 - 1 = A_1 + A_2 = A.$$

$\Rightarrow$  Rekursiv: Reicht, Satz 1 für Dreiecke zu zeigen, da jedes Polytop triangulierbar ist (wie?).

Weiter: Jedes ganzz. Dreieck kann auf (bis auf Rotation) eine von 2 Arten in ein

ganzzahliges achsenparalleles Rechteck eingebettet werden.



⇒ Wie oben: Wenn Satz 1 für achsenparallele Rechtecke und Dreiecke mit zwei achsenparallelen Seiten gilt, dann auch für alle (ganzz.) Dreiecke.

→ Aufgabe 4.4 a)

□

Bem: Damit gilt  $L_P(1) = I + B = A - \frac{1}{2}B + 1 + B$

$$= A + \frac{1}{2}B + 1$$

für ganzzahlige Polytope  $P \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Allgemeiner:  $L_P(t) = t^2 A + \frac{1}{2} t B + 1$

→ Aufgabe 4.4 b)