Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert
Dr. F. von Heymann

Methoden und Probleme der diskreten Mathematik

Wintersemester 2014/2015

— Aufgabenblatt 5 —

Aufgabe 5.1

a) Sei T eine Triangulierung eines spitzen Kegels. Zeigen Sie, dass der Schnitt zweier simplizialer Kegel in T wieder ein simplizialer Kegel ist.

b) Bestimmen Sie eine Triangulierung des Würfels $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x_i \le 1 \text{ für alle } i \in [3]\}$, die die minimale Anzahl von drei-dimensionalen Simplizes verwendet.

Aufgabe 5.2 Seien $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{Z}^n$ linear unabhängig und sei $v \in \mathbb{R}^n$ derart, dass für

$$\Pi = \{\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n \ : \ 0 < \lambda_i < 1 \text{ für alle } i \in [n]\}$$

auf dem Rand von $v + \Pi$ keine Gitterpunkte liegen. Zeigen Sie:

a) $v + \Pi = -(-v + \Pi) + w_1 + \cdots + w_n$.

b) $\sigma_{v+\Pi}(z) = \sigma_{-v+\Pi}\left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n}\right) z^{w_1} \cdot \ldots \cdot z^{w_n}$.

c) Sei K der simpliziale Kegel mit Spitze 0 und Generatoren $w_1, \dots, w_n$. Dann ist

$$\sigma_{v+K}\left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n}\right) = (-1)^n \sigma_{-v+K}(z).$$

Aufgabe 5.3 Sei H die Hyperebene gegeben durch

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a^{\mathsf{T}} x = 0\}$$

mit $a \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es ein $v \in \mathbb{Z}^n$ gibt so dass gilt:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((kv + H) \cap \mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n.$$

Hinweis: Sie dürfen das Lemma von Bézout verwenden: Für jede Wahl von Zahlen $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}$ gibt es Zahlen $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{Z}$ so dass $s_1 b_1 + \cdots + s_k b_k = \mathrm{ggT}(b_1, \dots, b_k)$.

Aufgabe 5.4 Eine Hyperebene H heisst *rational* wenn sie geschrieben werden kann als

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a^{\mathsf{T}} x = b\}$$

mit $a \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass eine endliche Familie $\mathcal{H}$ von rationalen Hyperebenen um ein $v \in \mathbb{Q}^n$ verschoben werden kann, so dass keine Hyperebene in $v + \mathcal{H}$ einen ganzzahligen Punkt enthält.

Abgabe: Bearbeitete Aufgaben bis spätestens Mittwoch, den 12. November 2014 um 23 Uhr 59, in das Onlineformular auf der Vorlesungshomepage eintragen.

— Zitate —

In mathematics you don't understand things. You just get used to them.

John von Neumann (1903-1957)