Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert
Dr. F. von Heymann

Methoden und Probleme der diskreten Mathematik

Wintersemester 2014/2015

— Aufgabenblatt 6 —

Aufgabe 6.1 Sei P ein ganzzahliges Polytop mit $\dim(P) = n$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\operatorname{vol}(P) = \frac{1}{n!}\left((-1)^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}L_P(k)\right).$$

Aufgabe 6.2 Berechnen Sie die Ehrhart-Polynome und Ehrhart-Reihen der folgenden Polytope:

a) $P_1 = \operatorname{conv}\{(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$;

b) $P_2 = \operatorname{conv}\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$

Aufgabe 6.3 Sei P ein ganzzahliges Polytop mit $\dim(P) = n$, so dass $L_{P^\circ}(t) = L_P(t-k)$ und

$$L_{P^\circ}(1) = L_{P^\circ}(2) = \cdots = L_{P^\circ}(k-1) = 0$$

gilt, für ein $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\operatorname{Ehr}_P\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^{n+1}z^k \operatorname{Ehr}_P(z)$$

gilt, und finden Sie Polytope, welche die Voraussetzungen erfüllen.

Aufgabe 6.4 Sei P ein ganzzahliges Polytop mit $\dim(P) = n$ und

$$\operatorname{Ehr}_P(z) = \frac{h_n z^n + h_{n-1}z^{n-1} + \cdots + h_1 z + 1}{(1-z)^{n+1}}.$$

Zeigen Sie, dass $h_n = L_{P^\circ}(1)$ gilt.

Abgabe: Bearbeitete Aufgaben bis spätestens Mittwoch, den 19. November 2014 um 23 Uhr 59, in das Onlineformular auf der Vorlesungshomepage eintragen.

— Zitate —

Aus: David Hilbert — Mathematische Probleme
Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900

Ein mathematisches Problem sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrengung nicht spotte; es sei uns ein Wahrzeichen auf den verschlungenen Pfaden zu verborgenen Wahrheiten - uns hernach lohnend mit der Freude über die gelungene Lösung.

[. . .]

Dieser Weg zur Auffindung allgemeiner Methoden ist gewiß der gangbarste und sicherste; denn wer, ohne ein bestimmtes Problem vor Auge zu haben, nach Methoden sucht, dessen Suchen ist meist vergeblich.

Eine noch wichtigere Rolle als das Verallgemeinern spielt - wie ich glaube - bei der Beschäftigung mit mathematischen Problemen das Specialisiren. Vielleicht in den meisten Fällen, wo wir die Antwort auf eine Frage vergeblich suchen, liegt die Ursache des Mißlingens darin, daß wir einfachere und leichtere Probleme als das vorgelegte noch nicht oder noch unvollkommen erledigt haben. Es kommt dann Alles darauf an, diese leichteren Probleme aufzufinden und ihre Lösung mit möglichst vollkommenen Hilfsmitteln und durch verallgemeinerungsfähige Begriffe zu bewerkstelligen. Diese Vorschrift ist einer der wichtigsten Hebel zur Ueberwindung mathematischer Schwierigkeiten und es scheint mir, daß man sich dieses Hebels meistens - wenn auch unbewußt - bedient.