

§4 Ehrhart-Theorie

Ziel: (Satz von Ehrhart) Für jedes ganzzahlige Polytop P mit $\dim P = n$ ist $L_P(t)$ ein Polynom in t vom Grad n .

1. Reduktion auf Simplexes

Def 1: Eine Triangulierung eines Polytops P mit $\dim P = n$ ist eine endliche Familie T von n -Simplexes mit

$$(a) \quad P = \bigcup_{\Delta \in T} \Delta$$

(b) $\Delta_1, \Delta_2 \in T \Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2$ ist eine Seite von sowohl Δ_1 als auch Δ_2 .

P ist ohne neue Ecken triangulierbar, falls es eine Triang. T von P gibt, so dass für jedes $\Delta \in T$ die Ecken von Δ auch Ecken von P sind.

Thm 2: Jedes Polytop ist ohne neue Ecken triangulierbar.

Beweisidee: Hochhebung (lifting) in Dimension

$n+1$: Für jede Ecke wähle eine zufällige (positive) Höhe in der letzten Koordinate.

Betrachte die konvexe Hülle der neuen Punkte.

Jede Facette des neuen Polytops ist mit W'keit

1 ein Simplex (sonst wären $n+1$ neue Punkte auf einer Hyperebene).

Betrachte die Facetten, die von Punkten in der Projektion auf die Ebene $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ "zersehen" sind.

Die Projektionen dieser Facetten sind eine Triangulierung ohne neue Ecken. □

Bem: Es ist vieles unbekannt in Bezug auf

Triangulierungen, z.B.:

- Für festes P , wieviele Triangulierungen ohne neue Ecken gibt es?

- Wieviele Elemente hat die kleinste Triang. ohne neue Ecken für n -Würfel ($n \geq 8$)?

Def 3: Ein (endl. erz.) spitzer Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist von der Form

$$K = \{v + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m : \lambda_i \geq 0 \forall i \in [m]\}$$

wobei $v, w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^n$ so dass es eine Hyperebene H gibt mit $H \cap K = \{v\}$ und $K \setminus \{v\}$ liegt ganz in H^+ oder H^- .

Die Ecke v heißt auch Spitze von K und die w_k heißen Generatoren. K heißt rational falls $v, w_1, \dots, w_m \in \mathbb{Q}^n$ ($\Leftrightarrow v \in \mathbb{Q}^n, w_1, \dots, w_m \in \mathbb{Z}^n$).

Die Dimension von K ist wieder die Dimension des kleinsten affinen URs der K enthält.

Def 4: Ein Kegel K mit $\dim K = n$ heißt Simplizial falls K genau n lin. unabh. Generatoren hat.

Ungleichungsbeschreibung: Ein rationaler spitzer n -Kegel ist der Schnitt endl. vieler Halbräume der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq b\}$$

mit $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ und alle Hyperebenen treffen

Sich in genau einem Punkt.

Wozu Kegel?

Hier: Kegel über einem Polytop:

Sei $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, dann $P = n$.

Definiere $w_1 := (v_1, 1), \dots, w_m := (v_m, 1)$ und

$$\text{Cone}(P) := \{\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m : \lambda_i \geq 0 \forall i \in [m]\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

$$\Rightarrow \text{Cone}(P) \cap \{x_{n+1} = 1\} = \{(x, 1) : x \in P\}$$

Lemma 5: $\text{Cone}(P) \cap \{x_{n+1} = t\} = \{(x, t) : x \in P\}$

Bew: Meditation. □

Da Kegel (unbeschränkte) Polyeder sind, können wir auch hier von Seiten, Facetten, Kanten und Ecken sprechen. (v ist einzige Ecke)

Def 6: Eine Familie T von Simplizialen n -Kegeln heißt Triangulierung eines n -Kegels K , falls gilt:

(a) $K = \bigcup_{S \in T} S$

(b) $S_1, S_2 \in T \Rightarrow S_1 \cap S_2$ ist Seite von S_1 und von S_2 .

K ist ohne neue Generatoren triangulierbar, falls es eine Triang. T gibt, so dass die Generatoren jedes $S \in T$ auch Generatoren von K sind.

Thm 7: Jeder spitze Kegel ist ohne neue Generatoren triangulierbar.

Bew: Sei H eine Hyperebene, mit $H \cap K = \{v\}$. $\dim K = n$

Verschiebe H so, dass sie K im Inneren schneidet.

Dieser Schnitt ist ein Polytop P mit $\dim P = n-1$.

Sei $T(P)$ eine Triangulierung ohne neue Ecken.

Für jedes $\Delta \in T(P)$, $\Delta = \{v_1^i, \dots, v_n^i\}$ betrachte

$$S_i := \{\lambda_1 v_1^i + \dots + \lambda_n v_n^i : \lambda_k \geq 0\}.$$

Dann ist S_i ein simplizialer Kegel und $\{S_i\}$ eine Triangulierung ohne neue Generatoren. $\square$

Definiere zu einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ die erzeugende Funktion der Gitterpunkte in S :

$$\sigma_S(z) = \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^n} z^m$$

wobei $z^m := z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot \dots \cdot z_n^{m_n}$.

Thm 8: Sei K ein simplizialer Kegel mit $\dim K = n$, gegeben durch

$$K = \{\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n : \lambda_i \geq 0 \forall i \in [n]\}$$

mit $w_k \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt

$$\sigma_{v+K}(z) = \frac{\sigma_{v+\pi}(z)}{(1-z^{w_1}) \cdot \dots \cdot (1-z^{w_n})}$$

für jedes $v \in \mathbb{R}^n$, wobei

$$\pi = \{\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n : 0 \leq \lambda_i < 1 \forall i \in [n]\}.$$

Bem: π heißt das fundamentale Parallelepiped von K . $\rightarrow$ Bild 

Bew: Sei $m \in (v+K) \cap \mathbb{Z}^n$. Dann ist

$$m = v + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n.$$

Nach Vor. ist diese Darstellung eindeutig.

Weiter gilt:

$$m = \underbrace{v + (\{\lambda_1\} w_1 + \dots + \{\lambda_n\} w_n)}_{=: p \in (v+\pi) \cap \mathbb{Z}^n} + \lfloor \lambda_1 \rfloor w_1 + \dots + \lfloor \lambda_n \rfloor w_n$$

und die Darstellung ist eind.

Andererseits:

$$\frac{\sigma_{v+\pi}(z)}{(1-z^{w_1}) \cdots (1-z^{w_n})} = \left(\sum_{p \in (v+\pi) \cap \mathbb{Z}^n} z^p \right) \left(\sum_{k_1 \geq 0} z^{k_1 w_1} \right) \cdots \left(\sum_{k_n \geq 0} z^{k_n w_n} \right)$$

$\Rightarrow$ In der ausmultiplizierten Reihe hat jeder Exponent die Form $p + k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n$ $\square$

Bem: Geometrisch: Kachelung von $v+k$ mit Kopien von $v+\pi$.

$\Rightarrow$ Gesamte Schwierigkeit beim Berechnen von σ_{v+k} ist enthalten in der Position der Gitterpunkte in $v+\pi$.

Korollar 9: Seien k und $w_1, \dots, w_n$ wie in Thm 8 und $v \in \mathbb{R}^n$ so dass der Rand von $v+k$ keine Gitterpunkte enthält. Dann gilt

$$\sigma_{v+k}(z) = \frac{\sigma_{v+\pi}(z)}{(1-z^{w_1}) \cdots (1-z^{w_n})}$$

wobei $\pi = \{ \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n : 0 < \lambda_i < 1 \ \forall i \in [n] \}$ das offene Parallelepiped ist.

Bew: Genau wie bei Thm 8. $\square$