

Korollar 10: Für jeden spitzen Kegel K ist

$\sigma_K(z)$ eine rationale Funktion in den Koordinaten von z .

Bew: Betrachte eine Triangulierung ohne neue Generatoren von K . Nach Aufgabe 5.1 und Thm 8 können wir für alle Elemente der Triangulierung und alle Seiten der Elemente die erzeugende Funktion ihrer Gitterpunkte als rationale Funktion schreiben. Diese können wir mit Inklusion-Exklusion addieren und erhalten $\sigma_K(z)$. □

2. Der Satz von Ehrhart

Thm 11: Sei P ganzzahliges Polytop mit $\dim P = n$. Dann ist $L_P(t)$ ein Polynom in t vom Grad n .

$L_P(t)$ heißt deshalb Ehrhart-Polynom.

Dazu: Potenzreihen über Polynome lassen sich charakterisieren!

Lemma 12: Sei

$$\sum_{t \geq 0} f(t) z^t = \frac{g(z)}{(1-z)^{n+1}}.$$

Dann gilt:

f ist Polynom mit $\deg(f) = n$

$\Leftrightarrow$ g ist Polynom mit $\deg(g) \leq n$ und $g(1) \neq 0$

Bew: Sei $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$

$$\Rightarrow \sum_{t \geq 0} f(t) z^t = a_0 \sum_{t \geq 0} z^t + a_1 \sum_{t \geq 0} t z^t + \dots + a_n \sum_{t \geq 0} t^n z^t$$

$$\rightarrow \text{Euler-Zahlen } \langle n \rangle_k: \sum_{j \geq 0} j^k z^j = \frac{\sum_{k=0}^n \langle n \rangle_k z^k}{(1-z)^{n+1}}$$

$\langle n \rangle_k$ = Anz. Permutationen, in denen genau k Elemente größer als ihr Vorgänger sind.

Umgekehrt:

$$\begin{aligned} \frac{g(z)}{(1-z)^{n+1}} &= \sum_{t \geq 0} g(z) \binom{n+t}{n} z^t \\ &= \sum_{t \geq 0} \sum_{k=0}^n c_k z^k \binom{n+t}{n} z^t \\ &= \sum_{t \geq k} \sum_{k=0}^n c_k \binom{n+t-k}{n} z^t \\ &= \sum_{t \geq 0} \sum_{k=0}^n c_k \binom{n+t-k}{n} z^t \end{aligned}$$

Also muss gelten

$$f(t) = \sum_{k=0}^n c_k \binom{n+t-k}{n}$$

□

Lemma 13: $\sigma_{\text{cone}(P)}(1, \dots, 1, z) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_P(t) z^t$

Bew: Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ war $\sigma_S(z)$ definiert als

$$\sigma_S(z) = \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^n} z^m$$

$$\Rightarrow \sigma_S(\mathbb{1}) = \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^n} \mathbb{1}^m = \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^n} 1 = |S \cap \mathbb{Z}^n|$$

(für beschränktes S).

Da wir in Lemma 5 gesehen haben, dass wir $t \in P$ im $\text{cone}(P)$ wiederfinden anhand von $x_{n+1} = t$, können wir $t \in P$ auch im $\sigma_{\text{cone}(P)}$ finden, anhand von z_{n+1}^t :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{cone}(P)}(z_1, \dots, z_{n+1}) &= 1 + \sigma_P(z_1, \dots, z_n) z_{n+1} + \sigma_{2P}(z_1, \dots, z_n) z_{n+1}^2 \\ &= 1 + \sum_{t \in P} \sigma_{tP}(z_1, \dots, z_n) z_{n+1}^t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{cone}(P)}(1, \dots, 1, z_{n+1}) = 1 + \sum_{t \in P} \sigma_{tP}(\mathbb{1}) z_{n+1}^t$$

$$= 1 + \sum_{t \in P} L_P(t) z_{n+1}^t \quad \square$$

Bew: (Thm 11) Mit Inklusion-Exklusion reicht es, den Satz für Simplex zu zeigen.

Nach Lemma 12 reicht es zu zeigen, dass für jeden ganzzahligen n -Simplex Δ gilt

$$1 + \sum_{t \geq 1} L_{\Delta}(t) z^t = \frac{g(z)}{(1-z)^{n+1}}$$

für ein Polynom g mit $\deg(g) \leq n$ und $g(1) \neq 0$.

$\text{Cone}(\Delta) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist simplizial mit Spitze 0 und Generatoren

$$w_1 = (v_1, 1), \dots, w_{n+1} = (v_{n+1}, 1) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

$\Rightarrow$ Nach Thm 8:

$$\sigma_{\text{Cone}(\Delta)}(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{\sigma_{\Pi}(z_1, \dots, z_{n+1})}{(1-z^{w_1}) \cdot \dots \cdot (1-z^{w_{n+1}})}$$

wobei $\Pi = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i w_i : 0 \leq \lambda_i < 1 \forall i \in [n+1] \right\}$.

$\sigma_{\Pi}(z) = \sum_{m \in \Pi \cap \mathbb{Z}^{n+1}} z^m$ ist ein Polynom in $z_1, \dots, z_{n+1}$.

Betrachte den Grad in z_{n+1} : Da die letzte Koord. von w_i immer 1 ist, gilt für jedes $m \in \Pi \cap \mathbb{Z}^{n+1}$

$$m_{n+1} = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} < d+1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^{n+1}} m_{n+1} \leq d$$

$$\Rightarrow \deg(\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1, z_{n+1})) \leq d.$$

Da zumindest $0 \in \pi$, ist $\sigma_\pi(1) = |\pi \cap \mathbb{Z}^{n+1}| \neq 0$.

Zuletzt ist

$$\sigma_{\text{cone}(\Delta)}(1, \dots, 1, z_{n+1}) = \frac{\sigma_\pi(1, \dots, 1, z_{n+1})}{(1 - z_{n+1})^{n+1}}.$$

Mit Lemma 13 folgt die Beh.

□

3. Die Ehrhart-Reihe

Die Reihe $1 + \sum_{t \geq 1} L_p(t) z^t =: El_p(z)$

heißt Ehrhart-Reihe.

Korollar 14: Sei $\Delta = \text{conv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ ganzzahliger Simplex mit $\dim \Delta = n$, und sei $w_j = (v_j, 1)$.

Dann ist

$$\begin{aligned} El_\Delta(z) &= 1 + \sum_{t \geq 1} L_\Delta(t) z^t \\ &= \frac{h_n z^n + \dots + h_1 z + h_0}{(1-z)^{n+1}} \end{aligned}$$

wobei h_k die Anzahl von Gitterpunkten in

$$\pi = \{ \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{n+1} w_{n+1} : 0 \leq \lambda_i < 1 \}$$

mit $w_{n+1} = k$ ist.

Bew: Im Beweis zu Thm 11 gesehen:

$$\begin{aligned} \text{Ehr}_\Delta(z) &= 1 + \sum_{t \geq 1} L_\Delta(t) z^t = \sigma_{\text{cone}(\Delta)}(1, \dots, 1, z_{n+1}) \\ &= \frac{\tilde{\sigma}_\Pi(1, \dots, 1, z_{n+1})}{(1 - z_{n+1})^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \tilde{\sigma}_\Pi(1, \dots, 1, z) &= \sum_{m \in \Pi \cap \mathbb{Z}^{n+1}} 1^{m_1} \cdots 1^{m_n} \cdot z^{m_{n+1}} \\ &= \sum_{m \in \Pi \cap \mathbb{Z}^{n+1}} z^{m_{n+1}} = \sum_{k=0}^n c_k z^k \end{aligned}$$

mit $c_k = \text{Anz. } m \in \Pi \cap \mathbb{Z}^{n+1} \text{ mit } m_{n+1} = k.$

□

Bem: Im Allgemeinen gibt es keine so klare Interpretation der Koeffizienten h_k , allerdings kann man zeigen, dass für jedes ganzzahlige Polytop P gilt: $\text{Ehr}_P(z) = \frac{h_n z^n + \dots + h_1 z + h_0}{(1-z)^{n+1}}$

mit ganzzahligen h_k . Sogar etwas mehr:

Thm 15: (Stanley's Nichtnegativitätssatz) Sei P ganzzahliges Polytop mit $\dim P = n$. Dann gilt

$$\text{Ehr}_P(z) = \frac{h_n z^n + \dots + h_0}{(1-z)^{n+1}},$$

mit ganzzahligen $h_0, h_1, \dots, h_n \geq 0$.

Bew: Zunächst triangulieren wir $\text{Cone}(P) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$
in Simplexiale Kegel $K_1, \dots, K_m$.

Nach Aufgabe 5.4: Wir finden einen Vektor
 $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $\text{Cone}(P) \cap \mathbb{Z}^{n+1} = (v + \text{Cone}(P)) \cap \mathbb{Z}^{n+1}$
und weder die Facetten von $v + \text{Cone}(P)$, noch
die Facetten von $v + K_1, \dots, v + K_m$ enthalten Gitter-
punkte.

$\Rightarrow$ Jeder Gitterpunkt in $v + \text{Cone}(P)$ liegt in
genau einem $v + K_j$:

$$\begin{aligned}\text{Cone}(P) \cap \mathbb{Z}^{n+1} &= (v + \text{Cone}(P)) \cap \mathbb{Z}^{n+1} \\ &= \bigcup_{j=1}^m ((v + K_j) \cap \mathbb{Z}^{n+1})\end{aligned}$$

und die Vereinigung ist disjunkt.

$$\Leftrightarrow \sigma_{\text{Cone}(P)}(z_1, \dots, z_{n+1}) = \sum_{j=1}^m \sigma_{v+K_j}(z_1, \dots, z_{n+1})$$

$$\Rightarrow \text{Ehr}_P(z) = \sigma_{\text{Cone}(P)}(1, \dots, 1, z) = \sum_{j=1}^m \sigma_{v+K_j}(1, \dots, 1, z)$$

$$\text{Nach Korollar 9: } \sigma_{v+K_j}(1, \dots, 1, z) = \frac{\sigma_{v+\pi_j}(1, \dots, 1, z)}{(1-z)^{n+1}}$$

mit $\pi_j = \{\lambda_1 w_{j1} + \dots + \lambda_n w_{jn} : 0 < \lambda_i < 1\}$ und
 w_{ji} sind lin. unabh. Generatoren von
 $\text{Cone}(P)$. $\square$