<u>Bem:</u> Damit haben wir eine geometrische Begründung, wieso $\mathrm{Ehr}_P(z)$ mit 1 beginnt: Die Null liegt in genau einem $v+k_j$, das heißt es gibt nur genau einen Beitrag zu $\frac{1}{(1-z)^{n+1}}$ in $\mathrm{Ehr}_P(z)$, alle anderen Terme haben höhere Exponenten im Zähler.

<u>Insbesondere:</u> $h_0 = 1$.

<u>Lemma 16:</u> Sei P ganzzahlig mit $\dim P = n$ und
$$\mathrm{Ehr}_P(z) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_P(t) z^t = \frac{h_n z^n + \dots + h_0}{(1-z)^{n+1}}.$$

Dann gilt
$$L_P(t) = \binom{t+n}{n} + h_1 \binom{t+n-1}{n} + \dots + h_{n-1}\binom{t+1}{n} + h_n \binom{t}{n}.$$

<u>Bew:</u> Ausrechnen.
$$\mathrm{Ehr}_P(z) = \frac{h_n z^n + \dots + 1}{(1-z)^{n+1}} \overset{\text{Aufgabe 4.3}}{=} (h_n z^n + \dots + h_0) \sum_{t \geq 0} \binom{n+t}{n} z^t$$

$$= h_n \sum_{t\geq 0} \binom{t+n}{n} z^{t+n} + h_{n-1} \sum_{t\geq 0} \binom{t+n}{n} z^{t+n-1} + \dots$$

$$+ h_1 \sum_{t\geq 0} \binom{t+n}{n} z^{t+1} + \sum_{t\geq 0} \binom{t+n}{n} z^t$$

$$= h_n \sum_{t\geq n} \binom{t}{n} z^t + h_{n-1} \sum_{t\geq n-1} \binom{t+1}{n} z^t + \dots$$

$$+ h_1 \sum_{t\geq 1} \binom{t+n-1}{n} z^t + \sum_{t\geq 0} \binom{t+n}{n} z^t$$

$$= \sum_{t\geq 0} \left(h_n \binom{t}{n} + h_{n-1} \binom{t+1}{n} + \dots + h_1 \binom{t+n-1}{n} + \binom{t+n}{n} \right) z^t$$

$\boxtimes$

Bem: Da $L_P(t)$ als Polynom ~~für mehr~~ Werte als $t \in \mathbb{Z}, t > 0$ definiert ist, können wir z.B. den Konstanten Term ermitteln:

$$L_P(0) = \binom{n}{n} + h_1 \binom{n-1}{n} + \dots + h_n \binom{0}{n} = \binom{n}{n} = 1 .$$

Korollar 17: Sei P ganzz mit $\dim P = n$ und

$$\mathrm{Ehr}_P(z) = \frac{h_n z^n + \dots + h_1 z + 1}{(1-z)^{n+1}} .$$

Dann ist $h_1 = L_P(1) - n - 1 = |P \cap \mathbb{Z}^n| - n - 1 .$

Bew: Nach Lemma 16:

$$L_P(1) = \binom{n+1}{n} + h_1\binom{n}{n} + \dots + h_n\binom{1}{n} = n+1+h_1 \quad \boxtimes$$

Korollar 18: Sei P ganzzahlig mit Ehrhart Polynom $L_P(t) = c_n t^n + \dots + c_1 t + 1$.

Dann ist $n! c_k \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in [n]$.

Bew: $L_P(t) = \binom{t+n}{n} + h_1\binom{t+n-1}{n} + \dots + h_n\binom{t}{n}$, und

alle h_k sind ganzzahlig.

$\Rightarrow$ Ausmultiplizieren liefert ein Polynom in t mit Koeffizienten, die als Bruch mit Nenner $n!$ geschrieben werden können. $\boxtimes$

4 Volumen

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ Riemann-integrierbar (z.B. Polytope).

Dann ist $\mathrm{Vol}(S) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{Vol}\left(\text{Approx. } S \text{ mit Würfeln der Seitenlänge } \frac{1}{t}\right)$

Solche Würfel können als der Zwischenraum zwischen Gitterpunkten im $\left(\frac{1}{t}\mathbb{Z}\right)^n$ gesehen werden. Ein solcher Würfel hat Volumen $\left(\frac{1}{t}\right)^n$.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{vol}(S) = \lim_{t\to\infty} \left(\tfrac{1}{t}\right)^n \cdot \left| S \cap \left(\tfrac{1}{t}\mathbb{Z}\right)^n \right|$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left(\tfrac{1}{t}\right)^n \cdot \left| tS \cap \mathbb{Z}^n \right|$$

(für $\dim S = n$)

Lemma 19: Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ganzzahliges Polytop mit $\dim P = n$ und $L_P(t) = c_n t^n + \dots + c_1 t + 1$.
Dann ist $c_n = \mathrm{vol}(P)$.

Bew:
$$\mathrm{vol}(P) = \lim_{t\to\infty} \frac{c_n t^n + \dots + c_1 t + 1}{t^n} = c_n \qquad \boxtimes$$

Korollar 20: Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ganzz. Polytop mit $\dim P = n$
und $$\mathrm{Ehr}_P(z) = \frac{h_n z^n + \dots + h_1 z + 1}{(1-z)^{n+1}}.$$
Dann ist $\mathrm{vol}(P) = \frac{1}{n!}(h_n + h_{n-1} + \dots + h_1 + 1)$.

Bew: Nach Lemma 16 ist der führende Koeffizient von $L_P(t)$ genau $\frac{1}{n!}(h_n + \dots + h_1 + 1)$ $\boxtimes$

Sei der Grad eines Polytops P gegeben als

$$\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{Z} : h_k \neq 0\}$$

(wobei $\mathrm{Ehr}_P(z) = \frac{h_n z^n + \dots + h_1 z + 1}{(1-z)^{n+1}}$)

Vermutung (Batyrev): Wenn $\deg P = j$, dann ist das relative Volumen $\frac{1}{n!}\mathrm{Vol}(P)$ beschränkt durch eine Funktion in h_j, unabhängig von n.

(Bekannt für $j = n$)

Klassifikation der Ehrhart-Polynome vom Grad n?
(Bekannt für $n=2$, teilweise für $n=3$, $n=4$)

Gegeben Polytope P, Q mit $L_P(t) = L_Q(t)$.
Unter welchen Umständen sind P, Q nicht unimodular äquivalent (d.h. wann ex. kein $m \in \mathbb{Z}^n$, $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, $\det(A) = \pm 1$, mit $Q = m + A(P)$) ?