

§5 Reziprozität

Theorem 1: (Ehrhart-Macdonald Reziprozität)

Sei P ein ganzzahliges Polytop. Dann gilt

$$L_P(-t) = (-1)^{\dim P} L_{P^0}(t)$$

Lemma 2: (Stanley Reziprozität) Sei K ein rat. Kegel, $\dim K = n$, mit Spitze O und $K^0 \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$.

Dann gilt $\sigma_K\left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n}\right) = (-1)^n \sigma_{K^0}(z_1, \dots, z_n)$.

Bew: Sei $\{k_1, \dots, k_m\}$ eine Triangulierung von K ohne neue Generatoren, und sei $v \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass

$$K^0 \cap \mathbb{Z}^n = (v + K) \cap \mathbb{Z}^n$$

und

$$\partial(v + K_j) \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset \quad \text{und} \quad \partial(-v + K_j) \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset.$$

Dann ist insbesondere $K \cap \mathbb{Z}^n = (-v + K) \cap \mathbb{Z}^n$.

Jede Facetten-definierende Hyperebene H von K wurde um weniger als eine Gitterebene verschoben (siehe Aufgabe 5.3) $\Rightarrow H^+ \cap \mathbb{Z}^n = (-v + H^+) \cap \mathbb{Z}^n$ $\quad \square$

Mit Aufgabe 5.2 gilt dann:

$$\sigma_k\left(\frac{1}{z}\right) = \sigma_{-v+k}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{j=1}^m \sigma_{-v+k_j}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^m (-1)^n \sigma_{v+k_j}(z) = (-1)^n \sigma_{v+k}(z)$$

$$= (-1)^n \sigma_{k^0}(z).$$

□

Für das Innere eines Polytops P definieren wir die Ehrhart-Reihe

$$\text{Ehr}_{P^0}(z) := \sum_{t \geq 1} L_{P^0}(t) z^t.$$

Bem: Hier setzen wir $t \geq 1$, weil damit wieder

$$\text{Ehr}_{P^0}(z) = \sigma_{(\text{Cone}(P))^0}(1, \dots, 1, z)$$

gilt.

Lemma 3: Sei P ganzzahlig und $\dim P = n$.

Dann gilt

$$\text{Ehr}_P\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^{n+1} \text{Ehr}_{P^0}(z).$$

Bew:

$$\text{Ehr}_p(z) = \sigma_{\text{conc}P}^0(1, \dots, 1, z)$$

$$\stackrel{\text{Lemma 2}}{=} (-1)^{n+1} \sigma_{\text{conc}P}(1, \dots, 1, \frac{1}{z})$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{t \geq 0} L_P(t) \left(\frac{1}{z}\right)^t$$

$$= (-1)^{n+1} \text{Ehr}_p\left(\frac{1}{z}\right).$$

□

Damit haben wir genug, um Thm 1 zu beweisen:

Beweis von Thm 1:

Haben in Aufgabe 4.2 gesehen: $\sum_{t \geq 0} z^t = - \sum_{t \geq 1} \left(\frac{1}{z}\right)^t$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} \left(\sum_{t \geq 0} z^t \right) = \frac{d}{dz} \left(- \sum_{t \geq 1} z^{-t} \right)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{t \geq 0} z^t \right) = \sum_{t \geq 0} (t+1) z^t = \sum_{t \geq 0} z^t + \sum_{t \geq 0} t z^t$$

$$\frac{d}{dz} \left(- \sum_{t \geq 1} z^{-t} \right) = - \sum_{t \geq 1} (-t) \left(\frac{1}{z}\right)^{t+1} = - \sum_{t \geq 2} (-(t-1)) \left(\frac{1}{z}\right)^t$$

$$= \sum_{t \geq 2} (t-1) \left(\frac{1}{z}\right)^t = - \sum_{t \geq 1} \left(\frac{1}{z}\right)^t + \frac{1}{z} + \sum_{t \geq 1} t \left(\frac{1}{z}\right)^t - \frac{1}{z}$$

$$= - \sum_{t \geq 1} \left(\frac{1}{z}\right)^t - \sum_{t \geq 1} (-t) \left(\frac{1}{z}\right)^t$$

- 62 -

Also: $\sum_{t \geq 0} t z^t = - \sum_{t \geq 1} (-t) \left(\frac{1}{z}\right)^t$

$\Rightarrow$ Für jedes Polynom $Q(t)$:

$$\sum_{t \geq 0} Q(t) z^t = - \sum_{t \geq 1} Q(-t) \left(\frac{1}{z}\right)^t$$

$$\Rightarrow \text{Ehr}_p\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{t \geq 0} L_p(t) \left(\frac{1}{z}\right)^t = - \sum_{t \geq 1} L_p(-t) z^t.$$

Mit Lemma 3:

$$\sum_{t \geq 1} L_{p^0}(t) z^t = (-1)^{n+1} \text{Ehr}_p\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^n \sum_{t \geq 1} L_p(-t) z^t.$$

$\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich liefert die Beh. $\square$

Thm 4: Sei P ganzzahlig mit

$$\text{Ehr}_p(z) = \frac{h_n z^n + \dots + h_1 z + 1}{(1-z)^{n+1}}.$$

Dann gilt:

$h_n = h_{n-1} = \dots = h_{k+1} = 0$ und $h_k \neq 0$ ist äquivalent zu

$(n-k+1)P$ ist das kleinste Dilat von P mit inneren Gitterpunkten.

Bew: Nach Lemma 4.16 gilt

$$L_p(t) = h_0 \binom{t+n}{n} + \dots + h_k \binom{t+n-k}{n} + h_{k+1} \binom{t+n-k-1}{n} + \dots + h_n \binom{t}{n}.$$

- Ang. $h_n = \dots = h_{k+1} = 0$, $h_k \neq 0$

Dann gilt für $t \in \{-1, -2, \dots, -(n-k)\}$:

$$L_p(t) = h_0 \binom{t+n}{n} + \dots + h_k \binom{t+n-k}{n} = 0$$

$$= (-1)^n L_{p^0}(-t),$$

$$\text{aber } L_p(-(n-k+1)) = h_k \binom{-1}{n} \neq 0$$

$$\Rightarrow L_{p^0}(n-k+1) \neq 0.$$

- Umgekehrt:

$$\begin{aligned} 0 &= L_{p^0}(1) = (-1)^n L_p(-1) = h_n \binom{-1}{n} + h_{n-1} \binom{0}{n} + \dots + h_0 \binom{n-1}{n} \\ &= h_n \binom{-1}{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_n = 0.$$

Analog: $h_{n-1} = \dots = h_{k+1} = 0$, und wie oben ist

$$L_{p^0}(n-k+1) = (-1)^n L_p(-(n-k+1)) = (-1)^n h_k \binom{-1}{n}$$

und somit folgt die Beh. □

Thm 5: Sei E ein System von endlich vielen linearen homogenen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, mit Variablen $x_1, \dots, x_n$.

Definiere $F(x) = \sum_{\substack{\alpha \text{ löst } E, \\ \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n}} x^\alpha$ und

$$\bar{F}(x) = \sum_{\substack{\alpha \text{ löst } E, \\ \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n}} x^\alpha.$$

Dann sind F und $\bar{F}$ rationale Funktionen und

$$\bar{F}(x) = (-1)^n F\left(\frac{1}{x}\right)$$

ist äquivalent zu

E hat eine Lösung $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ und $m = n - \text{rang}(E)$.

Bew: Dass die Existenz einer positiven ganzzahligen Lösung notwendig ist, ist klar.

Hinreichend: Die Menge der nicht-negativen Lösungen von E entspricht dem Schnitt des rationalen Kegels $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ mit einem $(n - \text{rang}(E))$ -dimensionalen

linearen Unterraum. Sei K dieser $m := (n - \text{rang}(E))$ -dim.
Kegel. Dann ist

$$F(x) = \sum_{p \in K \cap \mathbb{Z}^n} x^p \quad \text{und} \quad \bar{F}(x) = \sum_{p \in K^0 \cap \mathbb{Z}^n} x^p$$

$$\Rightarrow \bar{F}(x) = \sigma_{K^0}(x) \stackrel{\text{Lemma 2}}{=} (-1)^m \sigma_K\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^m F\left(\frac{1}{x}\right). \quad \square$$

Bem: Dies verallgemeinert Aufgabe 4.2.