Kapitel III – Topologische Methoden

Motivation:

Zu Beginn des Semesters: Knesergraphen $K(n,k)$

$$V = \{A \in 2^{[n]} : |A| = k\}$$

$$E = \{\{A,B\} : A,B \in V, A \cap B = \emptyset\}$$

Kneser-Vermutung: (1955)

$$\boxed{\chi(K(n,k)) = n-2k+2}$$

- Relativ einfach zu sehen: $\leq n-2k+2$ (→ Übungen)
- Erdős-Ko-Rado: $\alpha(K(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$

$$\Rightarrow \chi(K(n,k)) \geq \frac{|V|}{\alpha(K(n,k))} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{n}{k}$$

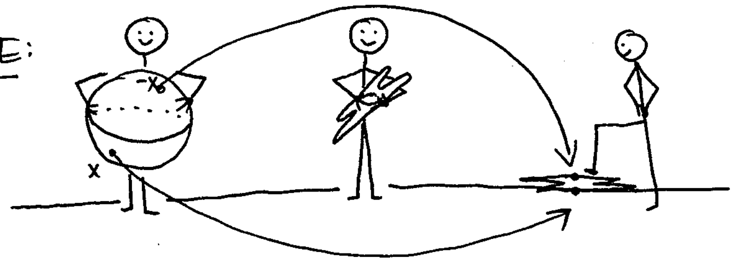
- Erst 1978: Beweis durch Lovász mit topologischen Methoden

Bis heute kein wirklich nicht-topologischer Beweis.

→ verwendet Satz von Borsuk-Ulam.

§ 1 Der Satz von Borsuk-Ulam

Idee:



„Es gibt immer zwei gegenüberliegende Punkte auf der Erde, die den gleichen Luftdruck und die gleiche Temperatur haben."

Satz 1: (Borsuk-Ulam)

① $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ stetig $\Rightarrow \exists x \in S^n: f(x) = f(-x)$

$[S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}]$

Alternative Formulierungen:

② $f: S^n \to S^m$ stetig und antipodal, d.h. $f(-x) = -f(x)$ f.a. $x \in S^n$

$\Rightarrow n \leq m$.

③ $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und antipodal

$\Rightarrow \exists x \in S^n: f(x) = 0$

④ $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} M_i$, M_i offen oder abgeschlossen f.a. $i = 1, \dots, n+1$

$\Rightarrow \exists i : M_i \cap (-M_i) \neq \emptyset$.

Beweis, dass ①, ②, ③, ④ äquivalent:

③ $\Rightarrow$ ①: $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ stetig

[① $\Rightarrow$ ③: klar] Definiere: $g: S^n \to \mathbb{R}^n$
$x \mapsto f(x) - f(-x)$

g stetig & antipodal!! $\Rightarrow \exists x: g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(-x)$

② $\Rightarrow$ ③: $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ stetig & antipodal

Ang. $f(x) \neq 0$ für alle $x \in S^n$.

Dann: $g: S^n \to S^{n-1}$ stetig & antipodal.
$x \mapsto \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$

↯

$① \Rightarrow ④$: $S^n = \bigcup_i M_i$, $M_1, \dots, M_{n+1}$ offen oder abgeschlossen

Definiere $f: S^n \to \mathbb{R}^n$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \text{dist}(x, M_1) \\ \vdots \\ \text{dist}(x, M_n) \end{pmatrix}.$$

f stetig $\Rightarrow \exists x: f(x) = f(-x)$

$x \in M_i$ für ein $i = 1, \dots, n+1$

$\underline{i < n+1}$: $0 = \text{dist}(x, M_i) = \text{dist}(-x, M_i)$

$\underline{M_i \text{ abgeschlossen}}$: $-x \in M_i$

$\underline{M_i \text{ offen}}$: $\underset{\inf\{d(x,m):\, m \in -M_i\}}{\text{dist}(x, -M_i)} = \text{dist}(-x, M_i) = 0$

- M_i offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subseteq M_i$.
- $\text{dist}(x, -M_i) = 0 \Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap (-M_i) \neq \emptyset$.

$\Rightarrow M_i \cap (-M_i) \neq \emptyset$

$\underline{i = n+1}$: Falls $-x \in M_{n+1}$: ✓

Falls $-x \notin M_{n+1}$: $\exists j: -x \in M_j$

Dann: $\text{dist}(x, M_j) = \text{dist}(-x, M_j) = 0$

$\Rightarrow M_j \cap (-M_j) \neq \emptyset$ (wie oben)

$④ \Rightarrow ②$: Ang. $f: S^n \to S^m$ stetig & antipodal mit $m < n$.

OBdA: $m = n-1$ $\left[\begin{array}{c} S^m \to S^{n-1} \\ x \mapsto \binom{x}{0} \end{array} \text{ stetig \& antipodal} \right]$

Behauptung: $\exists A_1, \dots, A_{n+1} \subseteq S^{n-1}$ abgeschlossen:

$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = S^{n-1}$, $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ f.a. $i = 1, \dots, n+1$.

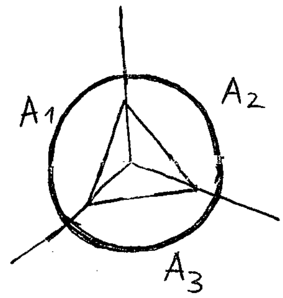
Mit Behauptung: Setze $M_i := f^{-1}(A_i) = \{x \in S^n : f(x) \in A_i\}$.

$\bigcup_i M_i = S^n$, $-M_i = \{-x : \underbrace{f(x)}_{= -f(-x)} \in A_i\} = \{y : f(y) \in -A_i\} = f^{-1}(-A_i)$

$\Rightarrow M_i \cap (-M_i) = \emptyset$, da $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ ↯

(Mi abgeschlossen, da f stetig & A_i abgeschlossen)

Beweis(skizze) der Beh.:



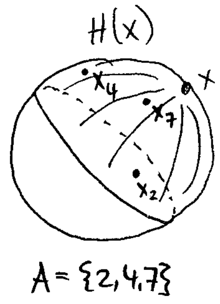
Δ n-Simplex mit $0 \in \operatorname{int} \Delta$, $\Delta \subseteq S^{n-1}$

- $\varphi : \partial\Delta \to S^{n-1}$ stetig & surjektiv
  $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$
- $A_i := \varphi(F_i)$, $F_1, \dots, F_{n+1}$ Facetten von Δ.
  A_i abgeschlossen, weil φ stetig, F_i kompakt
- $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$: $x, -x \in \varphi(F_i) \Rightarrow$ Gerade durch $x, 0, -x$ schneidet F zweimal und trifft intΔ. ↯

§2 Beweis der Kneser-Vermutung

In dieser Form von Greene (2002), Vereinfachung eines Beweises von Bárány

Satz 2: $\chi(K(n,k)) = n-2k+2$



Beweis: Sei $c : \binom{[n]}{k} \to \{1, \dots, n-2k+1\}$.

Setze $d := n-2k+1$ und wähle $X \subseteq S^d$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$:

$x_{i_1}, \dots, x_{i_{d+1}} \in X \Rightarrow x_{i_1}, \dots, x_{i_{d+1}}$ linear unabhängig.

Definiere für $i = 1, \dots, d$:

$$U_i := \{x \in S^d : \exists A \subseteq [n], |A| = k, c(A) = i : \{x_j : j \in A\} \subseteq \underbrace{H(x)}_{\text{offene Halbsphäre mit Zentrum } x}\}$$

- Ui offen: $x \in U_i$, $y \in B_\varepsilon(x)$: Wenn ε klein genug: $\{x_j : j \in S\} \subseteq H(y)$
- $A := S^d \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_d)$ abgeschlossen

$\underset{\text{BU}}{\Longrightarrow} \exists x : x, -x \in A$ oder $\exists i : x, -x \in U_i$

- $x, -x \in U_i$: $\exists S, T \subseteq [n]$, $c(S) = c(T) = i$: $\{x_j : j \in S\} \subseteq H(x)$, $\{x_\ell : \ell \in T\} \subseteq H(-x)$
  $\Rightarrow S \cap T = \emptyset$, da $H(x) \cap H(-x) = \emptyset \Rightarrow c$ keine gültige Färbung
- $x, -x \in A$: Nach Def. von A: $|X \cap H(x)|, |X \cap H(-x)| < k$
  $\Rightarrow |\underbrace{S^d \setminus (H(x) \cup H(-x))}_{= \{y : \langle x,y \rangle = 0\}} \cap X| \geq n - 2(k-1) = d+1$
  $\Rightarrow x_{i_1}, \dots, x_{i_{d+1}}$ in d-dim Unterraum von $\mathbb{R}^{d+1}$ ↯ Wa von