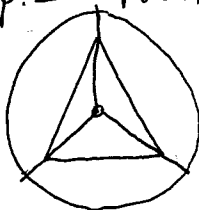


Borsale-Vermutung: $X \subseteq \mathbb{R}^n$

Kann man X in $X_1, \dots, X_{n+1}$ partitionieren,
so dass $\text{diam } X_i < \text{diam } X$ f.a. i ?

Satz 6, § 5, Kap. I: NEIN!

Für $X = B^n$: -JA!



Aber B^n kann nicht in n solche Mengen partitioniert werden!

$X_1, \dots, X_n$ mit $X_1 \cup \dots \cup X_n = B^n$

Def. $A_i := \overline{X_i} \cap S^{n-1}$.

$\cup A_i = S^{n-1}$, A_i abg. $\Rightarrow \exists i, x: x, -x \in A_i$,
also $x, -x \in \overline{X_i}$

$$\begin{aligned} \text{diam}(K_i) &= \text{diam}(\overline{X_i}) = \sup \{ \|x - y\| : x, y \in \overline{X_i} \} \\ &= \text{diam}(B^n). \end{aligned}$$

ZIEL: Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam über kombinatorisches Analogon (Lemma von Tucker)

ZUNÄCHST: Grundlagen zur Formulierung des Lemmas von Tucker

§3 MODELLIERUNG VON TOPOLOGISCHEN RÄUMEN

DURCH SIMPLIZIALKOMPLEXE

- Topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$:
 - X Menge, $\mathcal{O} \subseteq 2^X$ "offene Mengen"
 - $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$
 - $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$
 - $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{O}$

$\mathcal{O}$ heisst "Topologie"
auf X .

- Beispiele:
 - X bel. Menge :
 - $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ "triviale Topologie" / "indiskrete T."
 - $\mathcal{O} = 2^X$ "diskrete Topologie"
 - (X, d) metrischer Raum : $U \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^d(x) \subseteq U$
 $\mathcal{O} := \{U \subseteq X : U \text{ offen}\}$

- Unterraumtopologie: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $Y \subseteq X$

Von Y induzierter Unterraum:

$$(Y, \mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$$

Bsp.: $[0, \frac{1}{2})$ offen in $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

→ Wir betrachten nur Unterräume von $(\mathbb{R}^d, \text{Standardtopologie})$.
↳ von Euklidischer Metrik induziert

- Stetige Abbildungen: $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ top. Räume
 $f: X_1 \rightarrow X_2$ stetig $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{O}_2 : f^{-1}[U] \in \mathcal{O}_1$

- Wann sind $(X_1, \mathcal{O}_1)$, $(X_2, \mathcal{O}_2)$ "gleich"?

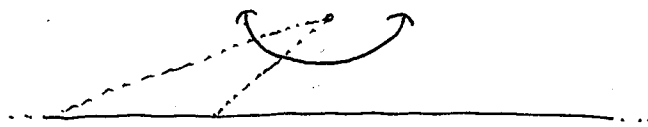
Homöomorphismus: $f: X_1 \rightarrow X_2$ Homöomorphismus

$$\Leftrightarrow f \text{ bijektiv \& } \forall U \subseteq X_1: f(U) \in \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow U \in \mathcal{O}_1.$$

$$\Leftrightarrow f \text{ bijektiv, } f \text{ stetig, } f^{-1} \text{ stetig.}$$

Dann: $X_1 \cong X_2$.

Beispiel: $(0,1) \cong \mathbb{R}$



→ Beschränktheit ist keine topologische Eigenschaft.

SIMPLIZIALKOMPLEXE

→ aus Simplexes zusammengelebte Räume

→ modellieren topologische Räume kombinatorisch
(nicht alle)

- k-dimensionaler Simplex im $\mathbb{R}^d$:

$$\sigma = \text{conv}(x_0, \dots, x_k), \quad x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d \text{ affin unabhängig}$$

$$V(\sigma) = \{x_0, \dots, x_k\}$$

- (geometrischer) Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^d$:

Δ Familie von Simplexes im $\mathbb{R}^d$ mit:

$$- \sigma \in \Delta, \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta$$

$$- \sigma, \tau \in \Delta \Rightarrow \sigma \cap \tau \text{ Seite von } \sigma \text{ und von } \tau.$$

- Beispiele: - Triangulierung eines Polytops (mit allen Seiten)



- Randkomplex eines simplizialen Polytops

P-simplizial, d.h. alle Seiten von P sind Simplexes

$$\rightarrow \Delta(P) := \{\sigma : \sigma \text{ Seite von } P, \sigma \neq P\}$$

$$\dim(\Delta) = \max_{\sigma \in \Delta} \dim(\sigma), \quad V(\Delta) = \bigcup_{\sigma \in \Delta} V(\sigma)$$

Welche Räume werden durch Simplicialkomplexe modelliert?

- Δ Simplicialkomplex im $\mathbb{R}^d$

$$\|\Delta\| := \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma \subseteq \mathbb{R}^d$$

"Polyeder" von Δ

($\rightarrow$ muss kein konvexes Polyeder sein!)

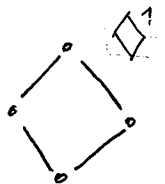
Wir betrachten nur endliche Simplicialkomplexe.

Dann: $\|\Delta\|$ erhält Unterraumtopologie als UR von $\mathbb{R}^d$.
[Einschränkung, da dann $\|\Delta\|$ immer kompakt.]

- X topologischer Raum mit $\|\Delta\| \cong X$.

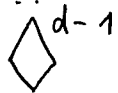
Dann heisst Δ Triangulierung von X .

Beispiel: Randkomplex des Kreuzpolytops



$Q^d = \text{conv}(\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\})$ d -dimensionales Kreuzpolytop

$$\Delta(\partial Q^d) = \{ \text{conv}(\{\varepsilon_{i_1} e_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_k} e_{i_k}\}) : 0 \leq k \leq d, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d, \varepsilon_{i_j} \in \{\pm 1\} \}$$



$(d-1)$ -dimensionaler Simplicialkomplex

$$\|\diamond^{d-1}\| = \partial Q^d \cong S^{d-1}$$

Abbildungen zwischen Simplicialkomplexen

- Δ_1, Δ_2 geometrische Simplicialkomplexe

$$f: V(\Delta_1) \rightarrow V(\Delta_2) \text{ simplicial}$$

$$\Leftrightarrow \text{conv}(\{f(x_0), \dots, f(x_k)\}) \in \Delta_2 \text{ für alle } \sigma \in \Delta_1, \\ \sigma = \text{conv}(\{x_0, \dots, x_k\})$$

- affine Erweiterung:

$$f: V(\Delta_1) \rightarrow V(\Delta_2) \text{ simplizial}$$

Definiere:

$$\|f\|: \|\Delta_1\| \rightarrow \|\Delta_2\| \quad \text{affine Erweiterung von } f$$

$$x \mapsto \sum_{i=0}^k \alpha_i f(x_i),$$

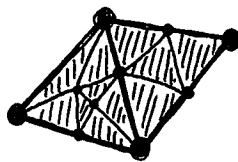
wobei $\sigma \in \Delta_1$ eindeutiger Simplex mit $x \in \text{int}(\sigma)$,
 $\sigma = \text{conv}(\{x_0, \dots, x_k\})$, $x = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$.

- Ohne Beweis: f simplizial $\Rightarrow \|f\|$ stetig

§ 4 DAS LEMMA VON TUCKER

Δ antipodensymmetrische Unterteilung von $\diamond^n$

$$\sigma \in \Delta \Rightarrow -\sigma \in \Delta$$



Δ_1 Unterteilung von Δ_2

$$\Leftrightarrow \|\Delta_1\| = \|\Delta_2\| \text{ und}$$

$$\forall \sigma \in \Delta_1, \exists \tau \in \Delta_2: \sigma \subseteq \tau$$

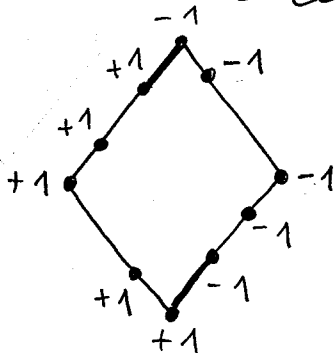
Lemma 1: (Tucker)

Δ antipodensymmetrische Unterteilung von $\diamond^d$,

$$\lambda: V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^{d-1}) \text{ antipodal}$$

$\Rightarrow \exists$ Kante (= 1-dimensionaler Simplex) e in Δ
 mit Ecken x, y , so dass $\lambda(x) = -\lambda(y)$.

$d=1$:



Identifiziere

$$V(\diamond^{d-1}) = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$$

mit $\{\pm 1, \dots, \pm d\}$.