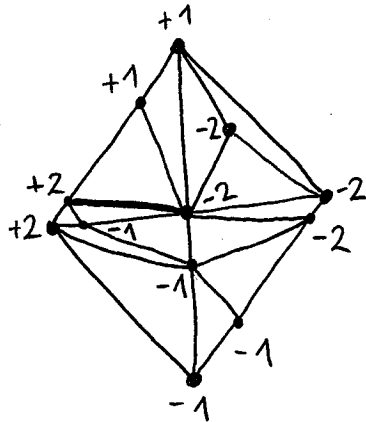


d=2: "Vorderseite" einer Unterteilung von $\diamond^2$:



Borsuk-Ulam $\Rightarrow$ Tucker: Übungen.

Tucker $\Rightarrow$ Borsuk-Ulam:

Für den Beweis benötigen wir baryzentrische Unterteilungen:

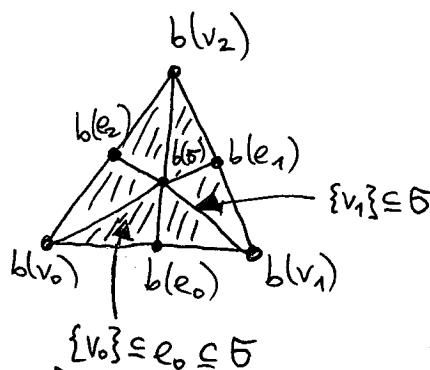
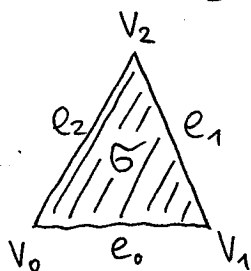
- $\sigma = \text{conv}(x_0, \dots, x_k)$

Schwerpunkt (Baryzentrum) von σ : $\frac{1}{k+1} \cdot \sum_{i=0}^k x_i =: b(\sigma)$

- Baryzentrische Unterteilung eines Simplex(komplex) Δ :

$$\text{sd } \Delta = \{ \text{conv}(\{b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_k)\}) : \sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_k, \sigma_0, \dots, \sigma_k \in \Delta \setminus \{\emptyset\} \} \cup \{\emptyset\}$$

Bsp:



Wichtige Eigenschaft: (ohne Beweis)

- $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_k$ mit $\dim(\sigma_i) = i$:

$$\text{diam}(\text{conv}(b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_k))) \leq \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma_k)$$

$$\begin{aligned} \text{diam}(\sigma) &= \max\{\|x-y\| : x, y \in \sigma\} \end{aligned}$$

- Damit:

$$\max_{T \in \mathcal{S}(\Delta)} \text{diam}(T) \leq \frac{d}{d+1} \max_{\sigma \in \Delta} \text{diam}(\sigma) \quad \text{für } \Delta \text{ d-dimensional}$$

- Also: Δ endlicher geometrischer Simplicialkomplex

$\forall \varepsilon > 0 \exists k$: Alle Simplices in $\text{sd}^k(\Delta) = \underbrace{\text{sd}(\text{sd}(\dots \text{sd}(\Delta) \dots))}_{k\text{-mal}}$ haben Durchmesser $< \varepsilon$.

- Außerdem: $\|\text{sd}(\Delta)\| = \|\Delta\|$, also $\|\text{sd}^k(\Delta)\| = \|\Delta\|$.

Beweis von Borsuk-Ulam mit Tucker:

Angenommen $f: \|\Diamond^d\| \rightarrow \mathbb{R}^d$,

f stetig und antipodal. Zeige: $\exists x: f(x) = 0$.

Das zeigt BU, da $\|\Diamond^d\| \cong S^d$. $\perp$

Zunächst: Für $\varepsilon > 0$, finde x_ε mit $\|f(x_\varepsilon)\|_\infty < \varepsilon$

Können k wählen mit:

e Kante von $\text{sd}^k(\Diamond^d)$ mit Ecken $x, y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon$.

Wähle $\delta > 0$ mit $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$ für alle i .
(Stetigkeit der f_i)

Dann wähle k , so dass $\text{diam}(\sigma) < \delta$ für alle $\sigma \in \text{sd}^k(\Diamond^d)$.

$\Delta = \text{sd}^k(\Diamond^d)$ ist eine antipodensymmetrische Unterteilung von $\Diamond^d$.

Definiere $\lambda: V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^{d-1})$:

$$x \in V(\Delta): \quad \begin{aligned} & \bullet i(x) := \min \{i: |f_i(x)| = \|f(x)\|_\infty\} \\ & \bullet \lambda(x) := \begin{cases} +e_{i(x)} & \text{falls } f_{i(x)}(x) \geq 0 \\ -e_{i(x)} & \text{falls } f_{i(x)}(x) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

λ antipodal: $i(-x) = i(x)$, da $|f_i(-x)| = |-f_i(x)| = |f_i(x)|$
 $\Rightarrow \lambda(-x) = -\lambda(x) \quad [f_{i(-x)}(-x) = f_{i(x)}(-x) = -f_{i(x)}(x)]$

Tucker $\Rightarrow \exists$ Kante in Δ mit Ecken $x, y: \lambda(x) = -\lambda(y)$.

OBdA: $\lambda(x) = e_i, \lambda(y) = -e_i$.

Damit: $f_i(x) \geq 0, |f_j(x)| \leq f_i(x) \text{ f.a. } j=1, \dots, d.$
 $f_i(y) < 0.$

Wissen: $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon$
 $f_i(x) - f_i(y)$

Also: $f_i(x) < \varepsilon + f_i(y) < \varepsilon$

und $|f_j(x)| \leq f_i(x) < \varepsilon \text{ f.a. } j=1, \dots, d.$

$\rightarrow$ Wähle $x_\varepsilon = x$.

Jetzt: Für $n \in \mathbb{N}$ setze $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und finde $x_n = x_{\frac{1}{n}}$ mit $\|f(x_n)\|_\infty < \frac{1}{n}$.

$\|\diamond^d\|$ kompakt $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat Häufungspunkt $x \in \|\diamond^d\|$:

$\exists n_1, n_2, \dots: x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x.$

Außerdem: $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \xRightarrow{f \text{ stetig}} f(x) = 0 \quad \square$

BEWEIS DES LEMMAS VON TUCKER

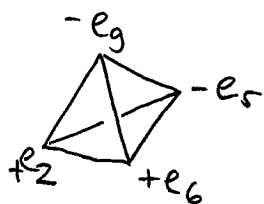
ZEIGEN STÄRKERE AUSSAGE:

SATZ 2 (KY FAN):

- Δ antipodensymmetrische Unterteilung von $\diamond^d$
- $\lambda: V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^m)$ ^{antipodal}, so dass es keine Kante in Δ gibt mit Ecken x, y und $\lambda(x) = -\lambda(y)$.

Dann: $|\{\sigma \in \Delta: \dim(\sigma) = d, \sigma \oplus\text{-alternierend}\}|$ ist ungerade.

Dabei: $\sigma \in \Delta$ alternierend $\Leftrightarrow \lambda(V(\sigma)) = \{\varepsilon_0 e_{j_0}, \varepsilon_1 e_{j_1}, \dots, \varepsilon_k e_{j_k}\}$,
[$\dim(\sigma) = k$]
 $j_0 < j_1 < \dots < j_k$,
 $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}: \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$



• $\sigma \oplus\text{-alternierend} \Leftrightarrow \lambda(V(\sigma)) = \{+e_{j_0}, -e_{j_1}, +e_{j_2}, \dots, (-1)^k e_{j_k}\}$,
 $j_0 < j_1 < \dots < j_k$

Impliziert TUCKER:

$\lambda: V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^{d-1})$ ohne Kante mit Ecken x, y und $\lambda(x) = -\lambda(y)$

$\Rightarrow \exists$ alternierender d -Simplex

Aber: $V(\diamond^{d-1}) = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\} \Rightarrow$ Zu wenige Label $\Leftarrow \square$

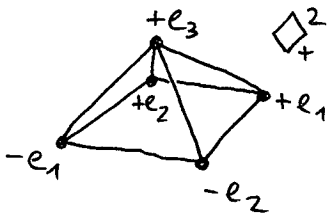
LEMMA 3: Δ, λ wie im Satz von Ky Fan

Dann: $\forall \sigma \in \Delta: \sigma \text{ alternierend} \Leftrightarrow \sigma \text{ hat ungerade viele } \oplus\text{-alternierende Facetten.}$

BEWEIS: Übungen!

BEWEIS VON SATZ 2:

$$\diamond_+^d := \left\{ \text{conv}(\{\varepsilon_{i_1} e_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_k} e_{i_k}\}) : 0 \leq k \leq d+1, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d+1, \right. \\ \left. \varepsilon_{i_j} \in \{\pm 1\} \text{ f\"ur } i_j \leq d, \underline{\varepsilon_{d+1} = +1} \text{ (falls } i_k = d+1) \right\}$$



Sei Δ^+ die von Δ induzierte Triangulierung von $\diamond_+^d$:

$$\Delta^+ = \{\sigma \in \Delta : \sigma \subseteq \diamond_+^d\}.$$

$$\boxed{\text{Analog: } \diamond_-^d, \Delta^-}$$

Zeigen zun\"achst:

$$(*) \quad |\{\sigma \in \Delta : \dim(\sigma) = d, \sigma \text{ alternierend}\}| = |\{\tau \in \Delta^+ \cap \Delta^- : \dim(\tau) = d-1, \tau \oplus \text{-alternierend}\}| \mod 2$$

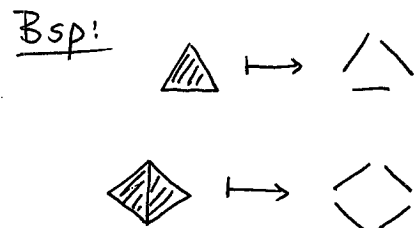
$$\bullet \quad \underline{C_k(\Delta^+)} := \mathbb{Z}_2\text{-Vektorraum der Dimension } |\{\sigma \in \Delta^+ : \dim(\sigma) = k\}| \\ \text{mit Basis } \{e_\sigma : \sigma \in \Delta^+, \dim(\sigma) = k\}.$$

(Vektoren in $C_k(\Delta^+)$ $\leftrightarrow$ Mengen von k -dim. Simplexes in Δ^+)

$$\partial : C_d(\Delta^+) \rightarrow C_{d-1}(\Delta^+) \text{ definiert durch}$$

$$e_\sigma \mapsto \sum_{\tau \text{ Facette von } \sigma} e_\tau \quad \text{„Randabbildung“}$$

$$\text{Also: } \partial\left(\sum_{\sigma \in M} e_\sigma\right) = \sum_{\tau: \tau \text{ Facette von ungerade vielen } \sigma \in M} e_\tau$$



• Definiere:

$$\beta : C_{d-1}(\Delta^+) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \text{ durch}$$

$$e_\tau \mapsto \begin{cases} 1 & \tau \oplus \text{-alternierend} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Also: } \beta\left(\sum_{\tau \in M} e_\tau\right) = |\{\tau \in M : \tau \oplus \text{-alternierend}\}| \mod 2$$

- Setze $\alpha := \beta \circ \partial$

Dann: $\alpha\left(\sum_{\sigma \in M} e_\sigma\right) = |\{\sigma \in M: \sigma \text{ alternierend}\}| \bmod 2$

Denn: $\alpha(e_\sigma) = \beta\left(\sum_{\substack{\tau \text{ Facette von } \sigma \\ \text{von } \sigma}} e_\tau\right) = |\{\tau: \tau \text{ Facette von } \sigma, \tau \oplus \text{-alternierend}\}|$

Nach Lemma: $\alpha(e_\sigma) = 1 \Leftrightarrow \sigma \text{ alternierend.}$

- Also

$$\alpha\left(\sum_{\substack{\sigma \in \Delta^+ \\ \dim(\sigma)=d}} e_\sigma\right) = |\{\sigma \in \Delta^+: \dim(\sigma)=d, \sigma \text{ alternierend}\}| \bmod 2$$

$$\beta\left(\partial\left(\sum_{\substack{\sigma \in \Delta^+ \\ \dim(\sigma)=d}} e_\sigma\right)\right) = |\{\tau \in \Delta^+ \cap \Delta^-: \dim(\tau)=d-1, \tau \oplus \text{-alternierend}\}| \bmod 2$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in \Delta^+ \\ \dim(\sigma)=d}} \partial e_\sigma = \sum_{\substack{\tau \in \Delta^+ \cap \Delta^- \\ \dim(\tau)=d-1}} e_\tau$$

Das zeigt $\otimes$, da $|\{\sigma \in \Delta^+: \dim(\sigma)=d, \sigma \text{ alternierend}\}|$
 $= |\{\sigma \in \Delta: \dim(\sigma)=d, \sigma \oplus \text{-alternierend}\}|$

Satz 2 folgt aus $\otimes$ durch Induktion über d (festes m):

- Satz 2 gilt für $d=1$.
- Wenn Satz 2 für $d-1$ gilt, ist

$$|\{\tau \in \Delta^+ \cap \Delta^-: \dim(\tau)=d-1, \tau \oplus \text{-alternierend}\}| \equiv 1 \bmod 2$$

antipodensymmetrische
Unterteilung von $\diamond^{d-1}$

Also gilt Satz 2 mit $\otimes$ auch für d .