§5 ABSTRAKTE SIMPLIZIALKOMPLEXE UND $\mathbb{Z}_2$-HOMOLOGIE

- V endliche Menge: $K \subseteq 2^V$ (endlicher) <u>abstrakter Simplizialkomplex</u>

  $:\Leftrightarrow$ K abgeschlossen unter Inklusion:

  $$F \in K,\ F' \subseteq F \Rightarrow F' \in K.$$

  Bsp: $G = (V, E)$ Graph $\Rightarrow$ $\{\emptyset\} \cup V \cup E$ abstrakter Simplizialkomplex

- Δ geometrischer Simplizialkomplex

  $\Rightarrow K(\Delta) := \{V(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$ abstrakter Simplizialkomplex.

  Δ „<u>geometrische Realisierung</u>" von $K(\Delta)$

  z.B.: $K(\Diamond^1) = \{\emptyset, \{+e_1\}, \{-e_1\}, \{+e_2\}, \{-e_2\}, \{+e_1,+e_2\}, \{+e_1,-e_2\}, \{-e_1,+e_2\}, \{-e_1,-e_2\}\}$

- $V(K) = \bigcup_{F \in K} F$

  $F \in K$: $\dim(F) = |F| - 1$, $\dim(K) = \max_{F \in K} \dim(F)$

- Jeder abstrakte Simplizialkomplex hat eine geometrische Realisierung:

  z.B.: $n = |V(K)|$ $\rightarrow$ Betrachte $x_1, \dots, x_n$ affin unabhängig im $\mathbb{R}^{n-1}$

  Identifiziere $V(K)$ mit $\{x_1, \dots, x_n\}$:

  $$\Delta(K) := \{\mathrm{conv}(F) : F \in K\}.$$

  ⌜Es gibt aber nicht <u>die</u> geometrische Realisierung. Nicht eindeutig!⌟

- K, L abstrakte Simplizialkomplexe, $f: V(K) \rightarrow V(L)$

  f <u>simplizial</u> $:\Leftrightarrow$ $f(F) \in L$ für alle $F \in K$

  f <u>Isomorphismus</u> $:\Leftrightarrow$ f bijektiv, simplizial, f^{-1} simplizial

  ↳ Dann: $K \cong L$

  z.B.: $K(\Diamond^1) \cong \{\emptyset, \{+1\}, \{-1\}, \{+2\}, \{-2\}, \{+1,+2\}, \{+1,-2\}, \{-1,+2\}, \{-1,-2\}\}$

- Δ_1, Δ_2 geometrische Simplizialkomplexe
  $f: V(K(\Delta_1)) \longrightarrow V(K(\Delta_2))$ simplizial
  $\Rightarrow$ f auch simpliziale Abbildung $V(\Delta_1) \longrightarrow V(\Delta_2)$
  und (f Isomorphismus $\Rightarrow \|f\|$ Homöomorphismus)

- Also: $K(\Delta_1) \cong K(\Delta_2) \Rightarrow \|\Delta_1\| \cong \|\Delta_2\|$
  $\longrightarrow$ Jeder abstrakte Simplizialkomplex bestimmt einen bis auf Homöomorphie eindeutigen topologischen Raum.

$\rightsquigarrow$ Brauchen zwischen abstrakten und geometrischen Simplizialkomplexen nicht zu unterscheiden!

$\mathbb{Z}_2$-HOMOLOGIE:

K abstrakter Simplizialkomplex

- $C_i(K,\mathbb{Z}_2) := \mathbb{Z}_2$-Vektorraum der Dimension $|\{F\in K : \dim(F)=i\}|$ mit Basis $\{e_F : F\in K, \dim(F)=i\}$.

- $\partial_i : C_i(K,\mathbb{Z}_2) \longrightarrow C_{i-1}(K,\mathbb{Z}_2)$ lineare Abbildung def. durch

$$e_F \longmapsto \sum_{\substack{H\subseteq F,\\ \dim(H)=i-1}} e_H = \sum_{v\in F} e_{F\setminus\{v\}}$$

„<u>Randabbildung</u>"

- Wichtige Eigenschaft: $\partial_i\partial_{i+1} = 0$.

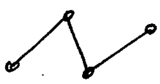
$$\partial_i\partial_{i+1}e_F = \partial_i\Big(\sum_{v\in F} e_{F\setminus\{v\}}\Big) = \sum_{v\in F}\sum_{u\in F\setminus\{v\}} e_{F\setminus\{u,v\}} = 0$$

jeder Summand kommt 2x vor!

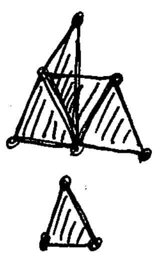
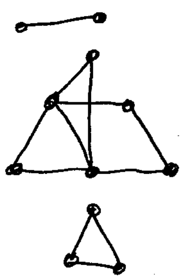
- Beispiel: $\dim(K)=2$

$$0 \xrightarrow{\partial_3=0} C_2(K,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_0} C_{-1}(K,\mathbb{Z}_2)$$

$$C_2(K,\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{|\{F\in K:\dim(F)=2\}|},\quad C_1(K,\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{|\{F\in K:\dim(F)=1\}|},\quad C_0(K,\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{|V(K)|},\quad C_{-1}(K,\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

 $\longmapsto$  $\longmapsto 0\cdot e_\emptyset$

Gerade viele Knoten!

 $\longmapsto$  $\longmapsto 0 \;\Big(=\sum_{v\in V} 0\cdot e_v\Big)$

Jeder Knoten in gerade vielen Kanten!

- Raum der <u>i-dim. Zykel</u>:

$$\underline{Z_i(K,\mathbb{Z}_2)} := \ker \partial_i = \{\alpha \in C_i(K,\mathbb{Z}_2) : \partial_i \alpha = 0\}$$

- Raum der <u>i-dim. Ränder</u>:

$$\underline{B_i(K,\mathbb{Z}_2)} := \operatorname{im} \partial_{i+1} = \{\alpha \in C_i(K,\mathbb{Z}_2) : \alpha = \partial\beta \text{ für ein } \beta \in C_{i+1}(K,\mathbb{Z}_2)\}$$

- Weil $\partial_i \partial_{i+1} = 0$: $B_i(K,\mathbb{Z}_2) \subseteq Z_i(K,\mathbb{Z}_2)$

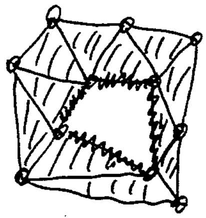
  „Ränder sind Zykel"

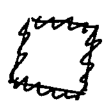
$$\underline{H_i(K,\mathbb{Z}_2)} := Z_i(K,\mathbb{Z}_2) / B_i(K,\mathbb{Z}_2)$$

<u>i-te Homologiegruppe von K (über $\mathbb{Z}_2$)</u>.

<u>Idee</u>: · Gibt es Zykel, die keine Ränder sind?

· Gibt es „i-dimensionale Löcher"?



 ist Zykel, aber kein Rand.

<u>Wichtige Eigenschaft</u>:

$X \cong Y$, K Triangulierung von X, L von Y

$\Longrightarrow H_i(K,\mathbb{Z}_2) \cong H_i(L,\mathbb{Z}_2)$

$\longrightarrow$ Kann verwendet werden, um Räume „auseinanderzuhalten".

(Aber nicht: „$\Longleftarrow$"! Keine Charakterisierung!)