§6 Weitere Anwendungen des Satzes von Borsuk-Ulam

1. Die chromatische Zahl von allgemeineren Knesergraphen

V endliche Menge, $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ Mengensystem

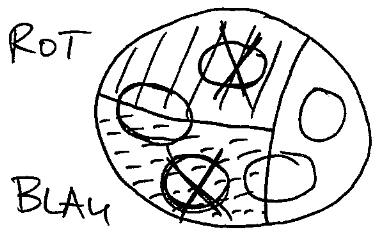
- $KG(\mathcal{F}) := (\mathcal{F}, \{\{A,B\} : A,B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset\})$ „Knesergraph von $\mathcal{F}$"

  ⌜$K(n,k) = KG(\binom{[n]}{k})$⌟

- $\mathcal{F}$ 2-färbbar $:\Leftrightarrow \exists\, c : V \to \{\text{rot}, \text{blau}\}$ Kein $F \in \mathcal{F}$ ist monochromatisch, d.h. $|c(F)| > 1$ f.a. $F \in \mathcal{F}$.

- 2-Färbbarkeits-Defekt:

  $$cd_2(\mathcal{F}) := \min\{|Y| : (V \setminus Y, \{F \in \mathcal{F} : F \cap Y = \emptyset\})\ \text{2-färbbar}\}$$



SATZ 1: (Dol'nikov)

V endlich, $\mathcal{F} \subseteq 2^V \Longrightarrow \chi(KG(\mathcal{F})) \geq cd_2(\mathcal{F})$

Übungen: $cd_2(\binom{[n]}{k}) \geq n - 2k + 2 \longrightarrow$ SATZ 1 verallgemeinert Kneser-Vermutung.

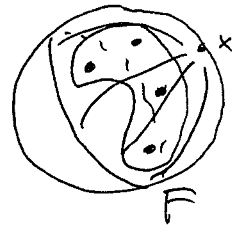
Beweis sehr ähnlich!

Beweis von Satz 1:

$d := \chi(KG(\mathcal{F}))$, $c : \mathcal{F} \to [d]$ Färbung, $n := |V|$.

Wähle wieder $X \subseteq S^d$, $|X| = n$, so dass je $d+1$ Punkte aus X linear unabhängig.

Identifiziere V mit X: $F \in \mathcal{F} \longleftrightarrow \{x_v : v \in F\} \subseteq X$



Definiere:

$$U_i := \{x \in S^d : \exists F \in \mathcal{F}, c(F) = i \text{ mit } \{x_v : v \in F\} \subseteq \underbrace{H(x)}_{\substack{\text{offene Halbsphäre}\\ \text{mit Zentrum } x}}\}$$

$\Longrightarrow$ U_i offen, $A := S^d \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_d)$ abgeschlossen. (wie im Beweis der Kneser-Verm.)

$\underset{BU}{\Longrightarrow}$ $\exists x$: $x, -x \in A$ oder $x, -x \in U_i$ für ein $i = 1, \ldots, d$.

- $x, -x \in U_i$ nicht möglich:
  Sonst $\exists F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $c(F_1) = c(F_2)$, aber $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

- Also: $x, -x \in A$.
  Färbe $v \in V$ rot, wenn $x_v \in H(x)$,
  blau, wenn $x_v \in H(-x)$,
  weiß, wenn x_v auf dem „Äquator" $S^d \setminus (H(x) \cup H(-x))$.
  Höchstens d Punkte auf dem Äquator (s. Beweis Kneser-Verm.)
  $\Longrightarrow cd_2(\mathcal{F}) \le d$.

□

2. Das Ham Sandwich-Theorem

→ Jedes Sandwich aus Schinken, Käse und Brot kann mit einem geraden Schnitt so zerteilt werden, dass Schinken, Käse und Brot gleichzeitig halbiert werden.

<u>Allgemeiner</u>: d kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ mit Hyperebene halbieren:

<u>Satz 2</u>: (Ham Sandwich-Theorem)

$K_1, K_2, \ldots, K_d \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt mit $\mathrm{vol}(K_i) > 0$

$$\Rightarrow \exists \text{ Hyperebene } H: \boxed{\mathrm{vol}(H^+ \cap K_i) = \mathrm{vol}(H^- \cap K_i) = \tfrac{1}{2}\mathrm{vol}(K_i) \text{ für } i = 1, 2, \ldots, d}$$

<u>Beweis</u>: Für $u \in S^d$ definiere $(u = (\tilde{u}, c), \tilde{u} \in \mathbb{R}^d, c \in \mathbb{R})$:

$$H(u) := \{x \in \mathbb{R}^d : \tilde{u}^T x = c\},$$
$$H^+(u) := \{x \in \mathbb{R}^d : \tilde{u}^T x \geq c\},$$
$$H^-(u) := \{x \in \mathbb{R}^d : \tilde{u}^T x \leq c\}.$$

⌜Hyperebene / Halbräume außer für $u = (0, \ldots, 0, \pm 1)$:
$H^+(0, \ldots, 0, 1) = \mathbb{R}^d$,
$H^+(0, \ldots, 0, -1) = \emptyset$ ⌟

Damit: $$f : S^d \to \mathbb{R}^d, \quad u \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{vol}(H^+(u) \cap K_1) \\ \vdots \\ \mathrm{vol}(H^+(u) \cap K_d) \end{pmatrix}$$

Falls $f(u) = f(-u)$:

- $H^+(-u) = H^-(u)$
- $u = (0, \ldots, 0, \pm 1)$ nicht möglich $(\mathrm{vol}(K_i) > 0)$, also $H = H(u)$ Hyperebene mit $\mathrm{vol}(H^+ \cap K_i) = \mathrm{vol}(H^- \cap K_i)$.

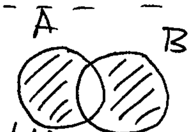
Bekommen ein solches u mit BU, falls <u>f stetig</u>.
↳ Zeigen wir jetzt. □

Lemma 3: $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, $f: S^d \to \mathbb{R}$ mit $f(u) = \mathrm{vol}(H^+(u) \cap K)$.
Dann ist f stetig.

Beweis: Sei $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$.

$$|f(u) - f(u_n)| = |\mathrm{vol}(H^+(u) \cap K) - \mathrm{vol}(H^+(u_n) \cap K)| \leq \mathrm{vol}\Big(\underbrace{(H^+(u) \cap K) \,\Delta\, (H^+(u_n) \cap K)}_{=:\, K_n}\Big)$$

$\ulcorner$ $|\mathrm{vol}(A) - \mathrm{vol}(B)| \leq \mathrm{vol}(A \Delta B)$:



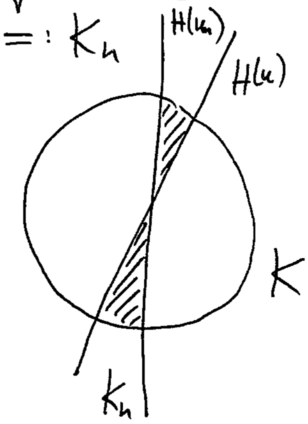
$B \subseteq A \cup B \setminus A \Rightarrow \mathrm{vol}(B) \leq \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B \setminus A)$

$\Rightarrow \mathrm{vol}(B \setminus A) \geq \mathrm{vol}(B) - \mathrm{vol}(A)$

Analog: $\mathrm{vol}(A \setminus B) \geq \mathrm{vol}(A) - \mathrm{vol}(B)$

$\Rightarrow |\mathrm{vol}(A) - \mathrm{vol}(B)| \leq \max(\mathrm{vol}(A \setminus B), \mathrm{vol}(B \setminus A))$

$\leq \mathrm{vol}(A \setminus B) + \mathrm{vol}(B \setminus A) = \mathrm{vol}(A \Delta B)$ $\lrcorner$



Zeige: $\limsup_{n\to\infty} \mathrm{vol}(K_n) = 0$

$\ulcorner$ Dann: $0 \leq \limsup_{n\to\infty} |f(u) - f(u_n)| \leq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{vol}(K_n) = 0$

$\Rightarrow |f(u) - f(u_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\lrcorner$

Betrachte $D_n := \bigcup_{i \geq n} K_i$. $\quad \Big[\underset{\bigcup_{i\geq 1} K_i}{\overset{\shortparallel}{D_1}} \supseteq \underset{\bigcup_{i\geq 2} K_i}{\overset{\shortparallel}{D_2}} \supseteq \ldots\Big]$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{vol}(K_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{i\geq n} \mathrm{vol}(K_i)}_{\leq \mathrm{vol}(D_n)} \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}(D_n) = \mathrm{vol}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\Big)$$

Zeige: $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq H(u) \cap K$ (Dann fertig, weil $\mathrm{vol}(H(u) \cap K) = 0$.)

Sei $x \notin H(u) \cap K$. Zeige $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$.

- $x \notin K \Rightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq K$
- $x \notin H(u) \Rightarrow x \in H^+(u)$ oder $x \in H^-(u)$

<u>$x \in H^+(u)$</u>: ($H^-(u)$ analog)

- $x \in H^+(u) \setminus H(u) \Rightarrow \tilde{u}^T x < c$.

  x fest, $u_n \to u$: $\tilde{u}_n^T x \to \tilde{u}^T x$, $c_n \to c$

  $\Rightarrow \tilde{u}_n^T x \leq c_n$ für n ausreichend groß.
- Also: $x \in H^+(u_n)$ für n ausreichend groß,

  genauer: $\exists n \; \forall i \geq n: x \in H^+(u_i)$.
- $x \in H^+(u)$, $x \in H^+(u_i)$, $x \in K$ $\Rightarrow x \notin \underbrace{(H^+(u) \triangle H^+(u_i)) \cap K}_{= K_i}$

<u>Insgesamt</u>: $\exists n \; \underbrace{\forall i \geq n: x \notin K_i}$

$x \notin \bigcup_{i \geq n} K_i = D_n$

$\Rightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$

$\square$